● Suites numériques

TESTS À SUITES NUMÉRIQUES

Généralités

Toute *suite numérique* se compose de nombres, ordonnés suivant une certaine loi de formation ; ainsi : 0 4 8 12 16 ... est la suite infinie des multiples de 4, débutant par le nombre 0, et obtenue en effectuant les multiplications qui donnent les produits 4 x 0 4 x 1 4 x 2 4x 3 4 x4 ...

Mise en *test*, la précédente suite se limitera, par exemple, à ( ) 4 8 12 16 ( ), et elle attendra du candidat qu'il découvre la loi de formation, multiplication de naturels successifs par 4, pour en déduire les nombres à placer entre parenthèses, 0 puis 20.

Nous examinerons d'abord la douzaine d'*items de base*, unités autour desquelles s'organisent les tests sur les suites numériques, à l'usage des cabinets de sélection.

Ces items, parmi les plus simples, proposent des suites partielles de (nombres) naturels de la numération décimale, donc qui appartiennent tous à la suite naturelle infinie :

N = (0, 1, 2, 3, 4, 5 ... 10, 11, 12 ...)

La loi de formation applicable est alors une loi arithmétique, essentiellement fondée sur les “quatre z'opérations”, et les naturels à découvrir, souvent les limites de la suite, sont toujours entre parenthèses.

Nous ferons suivre ces items de base d'un petit *exercice d'entraînement*, que vous pratiquerez dans le calme et en temps limité, et que vous pourrez encore noter vous-même, à l'aide de la solution et du barème (de BARREME, mathématicien du XVII[e] siècle) fournis.

Toutefois, les “pièces” arithmétiques ne se limitent pas aux seuls naturels, et ses “outils” aux quelques opérations élémentaires d'ailleurs ; en effet, vous pratiquez quotidiennement, à la calculette surtout, les nombres décimaux (à virgule), et, de temps en temps, les fraction(naire)s (à trait) ; vous possédez même, peut-être, les notions de valeur décimale quelconque et de nombre irrationnel : enfin, vous connaissez certainement, à côté de la décimale, l'antique numération romaine, avec ses chiffres-lettres, et la moderne binaire, avec ses ronds et barres.

Alors, essayez donc pour le plaisir l'autre douzaine d'*items spéciaux* sur les suites numériques, tout à fait “hors commerce”, que nous avons exceptionnellement concoctés à votre bienveillante attention, pour clore hautement la suite ... de ces items.

Items de base sur les suites numériques

$\boxed{A}$ 9 16 23 30 37 (44)

Chaque nombre, après le premier, est obtenu en ajoutant 7 au précédent ; donc le nombre cherché est 37 + 7 = <u>44</u>, et la suite peut se noter :

9 (+7) 16 (+7) 23 (+7) 30 (+7) 37 (+7) 44

Cette suite simple est appelée *progression (arithmétique)* à six termes, de premier terme 9 et de raison +7 ; elle est croissante.

$\boxed{B}$ 38 29 20 11 (2)

Chaque nombre, après le premier, est obtenu en retranchant 9 du précédent ; donc le nombre cherché est 11 - 9 = <u>2</u>, et la suite peut se noter :

38 (-9) 29 (-9) 20 (-9) 11 (-9) 2

C'est un progression à cinq termes, de premier terme 38 et de raison -9 ; elle est décroissante, et procède a l'opposé de la précédente progression.

C 0 8 16 24 32 (40)

Cette suite est une certaine progression de raison +8 ; mais, débutant par 0, elle est aussi la suite à six termes des *multiples* de la "table de multiplication" par 8 ; son cinquième terme cherché, après 0, est alors 32 + 8 = 8 x 5= 40, et elle peut se noter :

8 x 0 8 x 1 8 x 2 8 x 3 8 x 4 8 x 5 = 40

La suite (croissante et infinie) des multiples de 2 se compose des pairs (ou doubles) : 0, 2, 4, 6 ... ;

celle des non-multiples de 2 renferme les *impairs* : 1, 3, 5, 7 ... .

D 60 48 36 24 (12) (0)

Cette suite est une certaine progression de raison -12 , mais elle est aussi la suite décroissante des multiples de 12 de premier terme 60 ; ses deux derniers termes cherchés sont donc : 24 - 12 = 12 x 1= 12 et 12 -12 = 12 x 0 = 0, et elle peut se noter :

12 x 5 12 x 4 12 x 3 12 x 2 12 x 1 = 12 12 x 0 = 0

E 5 20 80 320 (1280)

Chaque nombre après le premier, est le produit par 4 de son précédent ; donc le nombre recherché est 320 x 4 = 1280, et la suite peut se noter :

5 (x4) 20 (x4) 80 (x4) 320 (x4) 1280

Cette suite est appelée *progression (géométrique)* à cinq termes, de premier terme 5 et de *raison* x 4 ; elle est croissante.

F 486 162 54 18 (6) (2)

Chaque nombre, après le premier, est le quotient par 3 de son précédent : donc les deux derniers nombres cherchés sont 18 / 3 = 6 et 6 / 3 = 2 , la suite pouvant se noter :

486 (/3) 162 (/3) 54 (/3) 18 (/3) 6 (/3) 2

C'est la progression à six termes, de premier terme 486 et de raison /3 ; elle est décroissante, et procède à l'inverse de la précédente progression.

G 1 3 9 27 81 (243)

Cette suite est une certaine progression de raison x3 ; mais, débutant par 1, elle est aussi la suite à six termes des *puissances* de 3 ; son cinquième terme cherché, après 1, est alors 3^5 = 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 81 x 3 = 243 , et elle peut se noter :

3^0 3^1 3^2 3^3 3^4 3^5 = 243

L'importante *suite binaire* est ainsi celle, croissante et infinie, des puissances de 2, soit : 2^0 = 1 2^1 = 2 2^2= 4 2^3 = 8 2^4 = 16 2^5= 32 ...

H   0 1 4 9 16 25 (36)

Chaque nombre est le produit par lui-même, soit le carré du nombre de même rang de la suite naturelle, limitée ou non ; donc la limite cherchée, ou terme de 7ᵉ rang, est ici $6 \times 6 = 6^2 = \underline{36}$; la suite des *carrés dits parfaits*, croissante et infinie, peut se noter :

$$0^2 \; 1^2 \; 2^2 \; 3^2 \; 4^2 \; 5^2 \; 6^2 \; \ldots$$

De même, la suite des *cubes parfaits*, ou produits des nombres par leurs carrés, tel $4 \times 4^2 = 4^3 = 64$, se note éventuellernent :

$$0^3 = 0 \quad 1^3 = 1 \quad 2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \;\ldots$$

I   5 10 13 26 29 58 61 (122) (125)

Cette suite présente deux *progressions composées*, de raisons x2 puis +3, car :

5(x2) 10 (+3) 13 (x2) 26 (+3) 29 (x2) 58 (+3) 61 (x2) <u>122</u> (+3) <u>125</u>

J   0 5 3 8 6 11 (9) 14 12

C'est une suite à progressions composées de raisons +5 puis -2, car :

0 (+5) 5 (-2) 3 (+5) 8 (-2) 6 (+5) 11 (-2) <u>9</u> (+5) 14 (-2) 12

Elle se décompose en deux progressions alternées de même raison + 5 - 2 = - 2 + 5 = + 3 , mais de premiers termes différents soit :

0 (+3) 3 (+3) 6 (+3) <u>9</u> (+3) 12   puis   5 (+3) 8 (+3) 11 (+3) 14

K   9 0 8 1 7 2 6 (3) (5) 4

Cette suite se décompose aussi en deux progressions alternées, mais de raisons et de premiers termes différents, soit :

9 (-1) 8 (-1) 7 (-1) 6 (-1) <u>5</u>   puis   0 (+1) 1 (+1) 2 (+1) <u>3</u> (+1) 4

ou :   9 (-9) 0 (+8) 8 (-7) 1 (+6) 7 (-5) 2 (+4) 6 (-3) <u>3</u> (+2) <u>5</u> (-1) 4

mais aussi :   9 + 0 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + <u>3</u> = <u>5</u> + 4 = 9

L   1 3 7 15 31 (63)

Les écarts entre termes successifs doublent régulièrement, soit :

1 (+2) 3 (+4) 7 (+8) 15 (+16) 31 (+32) <u>63</u>

ou $1 (+2^1)\; 3 (+2^2)\; 7 (+2^3)\; 15 (+2^4)\; 31 (+2^5)\; \underline{63}$

Exercice d'entraînement sur les suites numériques

♦ *Items proposés*

Ci-dessous, 15 items de suites numériques diverses, et même de progressions mathématiques, s'offrent à votre sagacité avertie. Il convient d'y répondre en 13 minutes exactement. Restez calme ; examinez, avec soin et célérité, chaque item, pour l'assimiler, si possible, à un type de base précédent.

Les difficultés n'apparaîtront surtout qu'à la fin de l'exercice, avec quelques "originalités", car ces items sont plutôt ordonnés, à votre intention et à votre attention.

A) 63 72 81 90 ( ) ( )

B) 33 40 47 54 61 ( )

C) 45 40 35 30 ( ) ( )

D) 11 33 ( ) 77 99 ( )

E) 13 11 9 7 5 ( ) ( )

F) 10 100 ( ) 10 000 100 000 ( )

G) 2 6 18 54 162 ( )

H) 224 112 56 28 14 ( )

I) ( ) 16 8 4 2 ( )

J) 1 3 5 15 17 51 53 ( ) ( )

K) 5 9 10 14 15 19 20 ( ) ( )

L) 5 10 14 17 ( ) 20

M) 1 2 3 5 8 13 ( ) 34

N) 0 3 9 21 45 93 ( )

O) 0 0 1 1 4 8 9 27 ( ) ( )

♦ *Réponses et lois*

$\boxed{A}$ 63 72 81 90 (99) (108)

Suite de multiples de neuf (la somme poussée de leurs chiffres est 9), ou progression de raison +9, soit :

9 x 7 (+9) 9 x 8 (+9) 9 x 9 (+9) 9 x 10 (+9) <u>9 x 11</u> (+9) <u>9 x 12</u>

$\boxed{B}$ 33 40 47 54 61 (68)

Progression de raison 7, qui n'est pas une suite de multiples de 7.

$\boxed{C}$ 45 40 35 30 (25) (20)

Suite décroissante de multiples de 5 (leur dernier chiffre est 0 ou 5), ou progression de raison -5, soit :

5 x 9 (-5) 5 x 8 (-5) 5 x 7 (-5) 5 x 6 (-5) <u>5 x 5</u> (-5) <u>5 x 4</u>

$\boxed{D}$ 11 33 (55) 77 99 (121)

Suite de multiples de 11 impairs, ou progression de raison +22.

$\boxed{E}$ 13 11 9 7 5 (3) (1)

Suite décroissante d'impairs, ou progression de raison -2.

$\boxed{F}$ 10 100 (10^3) 10 000 100 000 (10^6)

Suite de puissance de 10, ou progresion de raison x10, soit :

10^1 (x10) 10^2 (x10) $\underline{10^3}$ (x10) 10^4 (x10) 10^5 (x10) $\underline{10^6}$

$\boxed{G}$ 2 6 18 54 162 (486)

Progression de raison x3, qui n'est pas une suite de puissance de 3.

$\boxed{H}$ 224 112 56 28 14 (7)

Progression de raison /2, qui n'est pas une suite décroissante de puissance de 2.

$\boxed{I}$ (32) 16 8 4 2 (1)

Suite binaire décroissante, ou progression de raison /2, soit :

$\underline{2^5}$ (/2) 2^4 (/2) 2^3 (/2) 2^2 (/2) 2^1 (/2) $\underline{2^0}$

$\boxed{J}$ 1 3 5 15 17 51 53 (159) (161)

Suite à progressions composées de raisons x3 puis +2, soit :

1 (x3) 3 (+2) 5 (x3) 15 (+2) 17 (x3) 51 (+2) 53 (x3) <u>159</u> (+2) <u>161</u>

$\boxed{K}$ 5 9 10 14 15 19 20 (24) (25)

Suite à progressions composées, mais décomposable, soit :

5 (+4) 9 (+1) 10 (+4) 14 (+1) 15 (+4) 19 (+1) 20 (+4) <u>24</u> (+1) 25

ou : 5 (+5) 10 (+5) 15 (+5) 20 (+5) 25 puis 9 (+5) 14 (+5) 19 (+5) 24

$\boxed{\text{L}}$ 5 10 14 17 (19) 20

Suite composée avec la suite naturelle, décroissante et partielle, soit :

5 (+5) 10 (+4) 14 (+3) 17 (+2) <u>19</u> (+1) 20

$\boxed{\text{M}}$ 1 2 3 5 8 13 (21) 34

Chaque terme, à partir du troisième, est la somme des deux qui le précèdent, soit :

1 2 (+1) 3 (+2) 5 (+3) 8 (+5) 13 (+8) <u>21</u> (+13) 34

$\boxed{\text{N}}$ 0 3 9 21 45 93 (189)

Les écarts entre termes successifs doublent régulièrement, soit :

0 (+3) 3 (+6) 9 (+12) 21 (+24) 45 (+48) 93 (+96) <u>189</u>

$\boxed{\text{O}}$ 0 0 1 1 4 8 9 27 (16) (64)

Ce sont les carrés et les cubes de naturels successifs, soit :

$0^2\ 0^3\ 1^2\ 1^3\ 2^2\ 2^3\ 3^2\ 3^3\ 4^2 = \underline{16}\ 4^3 = \underline{64}$

Votre score, sur 15 points, est-il au moins égal à 10 ? Ce serait bien ! Il est vrai que la plupart des items proposés sont proches de ceux examinés à la base.

L'aspect mathématique (théorie des nombres), abordé dans l'étude de ces tests de suites numériques, vous a peut-être paru assez difficile ; mais, à notre avis, il est le seul capable d'expliquer correctement les divers procédés de résolution des items présentés ; alors, ne regrettez surtout pas le petit effort intellectuel exigé par cette étude.

Items spéciaux sur les suites numériques

Il est rappelé que la plupart de ces items spéciaux ne sont pas employés par les cabinets et services de sélection, et ne sont là que pour explorer un peu plus le vaste domaine des suites numériques ; les lecteurs non intéressés peuvent donc s'abstenir.

$\boxed{\text{A}}$ 1 3 6 10 ( ) ( )

Chaque terme s'obtient, sur la suite naturelle et à partir de son troisième terme, en ajoutant tous ceux qui le précèdent ; ainsi se forment successivement :

$0 + 1 = 1 \quad 0 + 1 + 2 = 3 \quad 0 + 1 + 2 + 3 = 6 \quad 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

puis : $0 + 1 + 2 + \ldots + 5 = 10 + 5 = \underline{15}$ et $0 + 1 + 2 + \ldots + 6 = 15 + 6 = \underline{21}$

Cette *loi de cumul* est souvent utilisée, en statistique par exemple.

$\boxed{B}$ 2 6 24 120 ( ) ( )

Chaque terme s'obtient sur la suite naturelle, sans zéro et à partir du troisième terme, en multipliant tous les termes qui le précèdent ; ainsi se forment successivement :

$2 = 1 \times 2 = 2\,!$ $6 = 1 \times 2 \times 3 = 3\,!$ $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4\,!$

$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5\,!$

puis : $1 \times 2 \times 3 \ldots \times 6 = 6\,! = 5\,! \times 6 = 120 \times 6 = \underline{720}$

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 7 = 7\,! = 6\,! \times 7 = 720 \times 7 = \underline{5040}$

Ces produits particuliers, ou *factorielles* (!) sont courants en analyse combinatoire.

$\boxed{C}$ 0,5 0,25 0,2 ( ) 0,1

C'est la suite croissante des valeurs décimales limitées, des inverses des naturels non supérieurs à 10, donc des *fractions "décimalisables"* correspondantes :

1/2 1/4 1/5 1/8 = $\underline{0{,}125}$ 1/10

$\boxed{D}$ 1 4 2 8 5 7 1 4 2 ( ) ( ) ( )

C'est la suite des premières décimales (chiffres après la virgule) de la valeur décimale illimitée de la fraction 1/7 , avec sa *période* notée $\overline{}$ car :

$1/7 = 0{,}\ 142\ 857\ 142\ 857 \ldots = 0{,}\overline{142\ 857}$

Les autres fractions non décimalisables ou périodiques, qui complètent les précédentes, sont :

$1/3 = 0{,}\overline{3}$ $1/6 = 0{,}1\overline{6}$ et $1/9 = 0{,}\overline{1}$

$\boxed{E}$ 1 4 1 5 9 ( ) ( )

Cette suite est celle des premières décimales de la valeur décimale illimitée non-périodique, du *nombre irrationnel* d'Archimède noté π, car $\pi = 3{,}141\ 59\underline{2}\ \underline{6}\ldots$

Ce nombre mesure le périmètre de tout cercle, avec son diamètre pour unité.

$\boxed{F}$ 4 1 4 2 1 ( ) ( )

Cette suite est celle des premières décimales de la valeur du nombre irrationnel noté $\sqrt{2}$, car $\sqrt{2} = 1{,}414\ 21\underline{3}\ \underline{5}\ldots$

Ce nombre mesure la diagonale de tout carré, avec son côté pour unité.

G I V X ( ) C D M

Suite, par valeurs croissantes, des lettres constituant les divers chiffres romains, soit : 1 5 10 L = 50 100 500 1000

La valeur 0, tout à fait inutile, n'a été attribuée à aucune lettre, même pas 0.

H L C CL CC CCL CCC CCCL ( )

Suite de multiples de 50, en numération romaine, commençant par 50 = L puis finissant par 400 = 500 - 100 = CD

I ( ) 110 111 1000 1001 1010

Suite naturelle partielle, en numération binaire, de dernier terme 1010 = 2 + 8 = 10, puis de premier 5 = 1 + 4 = 101

J 9 0 6 3 7 2 1 5 8 ( )

Ensemble des chiffres décimaux électroniques, à sept segments, le manquant étant 4.

K 0 ( ) 8 6

Ensemble des chiffres décimaux à boucles, dont le manquant est évidemment 9.

L 

Suite de chiffres décimaux de valeurs croissantes, avec leur image dans un miroir placé devant eux (par symétrie axiale), dont le dernier dessin est 

Avouez que cet ultime item numérique est bien singulier et plutôt difficile à résoudre, malgré un contexte favorable !

TEST PAIRS-PREMIERS

♦ *Pairs et premiers*

Les pairs, vous connaissez certainement : tout naturel est pair (ou double) ou bien impair, suivant qu'il est ou non multiple de 2 (ou divisible par 2).

Ces naturels particuliers forment les deux suites infinies :

$P = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12...)$ et $I = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...)$

pairs et impairs étant ainsi alternés dans la suite naturelle N.

P inclut la suite D des puissances naturelles de 2, tandis que la suite I est différente de celle T des nultiples de 3 :

$D = (2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^3 = 16, 2^4 = 32...)$ $T = (0, 3, 6, 9, 12, 15...)$

Il est possible d'opérer, non plus sur les naturels eux-mêmes, mais, très généralement, sur leur parité ; on démontre (on constate aussi), sur deux naturels arbitraires, et par exemple, que :

– Leur produit n'est impair que s'ils sont tous deux impairs, soit :

$$p_1 \times p_2 = p,\ p \times i = i \times p = p' \text{ et } i_1 \times i_2 = i$$

– Leur somme n'est impaire que s'ils sont de parités différentes, soit :

$$p_1 + p_2 = i_1 + i_2 = p \text{ et } p + i = i + p = i'$$

Ces opérations paritaires, grâce à leur simplicité, ont une grande importance pratique.

Mais, vous ne connaissez peut-être pas les premiers : alors prenez note aussitôt.

Tout naturel, sauf 0 et 1, a au moins deux diviseurs distincts : lui-même (le plus grand) et l'unité (1, le plus petit) ; un naturel premier n'a que ces deux diviseurs extrêmes, soit il a seulement une paire de diviseurs.

Ainsi, l'ensemble des diviseurs de 7, naturel premier, est {1, 7}, alors que celui de 6, non-premier est {6, 3, 2, 1}, avec quatre éléments.

Ces naturels premiers sont aussi ceux des naturels qui, multipliés entre eux ou par eux-mêmes, “produisent” tous les autres, dits encore “naturels composés”, mais sans être produits ainsi par d'autres naturels.

Ainsi, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 2^4$..., ou encore $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $12 = 2^2 \times 3$..., tous multiples de 2 et 3, sont des naturels composés, tandis que 2 et 3 sont premiers.

Cette seconde définition révèle des nombres privilégiés, encore mystérieux, mais essentiellement fondamentaux en théorie des nombres.

Vous en savez naintenant presque assez pour aborder l'épreuve promise.

♦ *Test scolaire*

Ce test se compose de dix courtes questions, telles qu'elles sont posées en mathématique scolaire auprès d'adolescents.

Ces questions portent sur des naturels pairs et impairs, ou premiers ou non ; elles sont données dans un ordre logique général, et doivent être examinées successivementt et sans en sauter aucune, même d'apparence difficile, en écrivant le moins possible.

Examinez très attentivement le contenu du premier paragraphe avant de répondre aux diverses questions, car elles en dépendent étroitement.

30 s sont accordées en moyenne par question donc 5 minutes pour le questionnaire, et les notes maximales attribuées sont de 1, 2 ou 3 points suivant les questions.

Partez le premier et, sans pair... dre de temps, inscrivez vos réponses à mesure ; quand vous voudrez !

1) Quel est le plus petit naturel premier ? ...

2) Quel est le plus grand naturel premier ? ...

3) Quels sont les naturels premiers pairs ? ...

4) Le double de tout impair, sauf un, est-il premier,
non-premier ou dépendant ? ...

5) Le produit de deux quelconques premiers est-il premier,
non-premier ou dépendant ? ...

6) La moitié de tout pair est-elle première, non-première
ou dépendante ? ...

7) La somme de deux quelconques premiers, sans le 2,
est-elle première, non-première ou dépendante ? ...

8) La somme de deux premiers déterminés
étant égale à un troisième, quel est le plus petit des trois ?
(curieuse question !) ...

9) Quel est le dernier chiffre possible de tout naturel premier
à plusieurs chiffres ? ...
Est-ce réciproque ? ...

10) Existe-t-il (oui, non ou vous l'ignorez)
au moins une relation infaillible donnant
tous les naturels premiers ? ...

Pour les résultats de ce test arithmétique, aucune attente : c'est tout-de-suite !

♦ *Réponses et commentaires*

En effet, vous trouverez ici, par numéro de question, la bonne réponse, qu'il fallait brièvement inscrire, et le nombre maximal de points affectés à cette réponse précise ; un petit commentaire, sans doute utile, complète ces résultats.

1° - 2 - 1 pt - 0, qui a pour diviseur tout naturel sauf lui-même, puis 1, qui n'a que lui-même pour diviseur, n'en ont pas une paire et sont non-premiers ; 2, le naturel suivant, dont les seuls diviseurs sont 1 et 2, est donc le plus petit premier.

2° - AUCUN - 1 pt - On démontre que la suite des naturels premiers est illimitée (ou infinie) ; donc il n'existe pas de premicr supérieur à tous les autres.

3° - LE SEUL 2 - 1 pt - Tous les pairs, sauf 2, ont au moins trois diviseurs, dont 2, et sont alors non-premiers ; les naturels premiers, sauf 2, sont donc tous impairs.

4° - NON-PREMIER - 2 pts - Le double de tout naturel est... pair, donc non-premier, à part 2, le double de 1 ; le premier double visé ici est alors 3 x 2 = 6.

5° - NON-PREMIER - 2 pts - Ce produit, qui ne peut être 2 x 1 = 2, possède en effet trois ou quatre diviseurs, comme 2 x 2 = 4 =) {1, 2, 4} ou 3 x 5 = 15 =) {1, 3, 5, 15}.

6° - DÉPENDANTE - 3 pts - Cette moitié est soit paire avec $0 \mapsto 0$, $4 \mapsto 2$, $8 \mapsto 4$... et non-première (sauf 2), soit impaire, avec $2 \mapsto 1$, $6 \mapsto 3$, $10 \mapsto 5$, $12 \mapsto 6$..., et parfois première.

7° - PAIRE - 2 pts - Cette somme de deux impairs est toujours paire ; elle serait dépendante avec 2, car 2 + 3 = 5, 2 + 5 = 7..., mais 2 + 2 = 4.

8° - 2 - 3 pts - La somme de deux quelconques premiers est supérieure à 2, et elle n'est première, donc impaire, que si l'un d'eux est justement 2, lequel étant le plus petit de tous les premiers, l'est des trois présents ; il existe de nombreux triplets conformes à la question : (2, 3, 5), (2, 5, 7), (2, 11, 13)..., leurs derniers composants différant tous de 2 évidemment.

9° - 1, 3, 7 ou 9, sans réciproque - 3 pts - Ce naturel étant impair se termine par 1, 2, 3 ou 9, mais pas par 5, car il n'est pas divisible par 5 ; mais un naturel terminé par 1, 3, 7 ou 9 n'est pas toujours premier : $21 = 3 \times 7$, $27 = 3^3$, $33 = 3 \times 11$...

10° - NON - 2 pts (IGNORANCE - 1 pt) - On ne connaît, à ce jour, aucune relation satisfaisante, permettant de calculer tous les naturels premiers, avec leur numéro d'ordre ou avec d'autres naturels, même premiers.

♦ *Conclusion*

Le moment est venu de totaliser vos points, sur les vingt prévus, et de vous apprécier honnêtement, soit à votre juste valeur :

Si vous ne dépassez pas 5 pts, votre potentiel mental arithmétique est faible : il faudrait sans doute reprendre les connaissances de base.

De 5 à 10 pts, l'ensemble est plutôt médiocre et vous manquez vraiment de pratique.

Entre 10 et 15 pts, vous avez du savoir et du savoir-faire : la voie est ouverte et la théorie des nombres vous attend.

A partir de 15 et jusqu'à 20 pts, on peut dire que vous possédez bien le sujet : bravo !

Revenez sur ce qui vous a paru difficile, en affaiblissant votre score ; et, si ce conseil est sans objet, alors... changez de domaine !

De toute facon, acceptez en cadeau de clôture, supposé mérité, la fameuse suite (à bien connaître) des quinze naturels premiers inférieurs a 50 :

P = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 ...)

LA SUITE LAPINE DE FIBONACCI

♦ *La cuniculiculture*

Vous connaissez ? Il s'agit tout simplement de l'élevage des lapins (“cuniculus” en latin), que Marcel Pagnol, dans *Jean de Florette*, appelle la “lapinoculture”.

L'animal étant particulièrement prolifique, cet élevage pose un intéressant problème de population, lequel, bien que simplifié, va vous “agresser” maintenant.

Imaginez donc un certain couple (et non une paire) de lapins d'élevage jumeaux, et supposez que, pendant chacun des deux trimestres suivant celui de sa naissance, et précédant celui de son passage à la casserole ce couple ne produise qu'un couple de jumeaux également ; ces deux nouveaux couples vivraient et procréeraient comme leurs parents, et il en serait de même de leurs enfants, puis de toute la lignée ainsi établie.

Combien cette lignée fictive comptera-t-elle d'individus, sur les trois années depuis la naissance du couple initial “de référence”.

Remarquez que la portée commune des lapines est ici minimisée, car, en vérité, elle dépasse souvent la dizaine de petits, tandis que la consanguinité ainsi provoquée serait vraiment désastreuse pour la lignée, donc... pour l'éleveur.

Notez surtout que, dans notre hypothèse, la vie entière de ces lapins s'effectue par couples et ne dure qu'une année, dont les deux trimestres médians sont seuls productifs ; de là, ce petit conseil de recherche : raisonnez par couples et sur les naissances des trimestres successifs des trois années considérées.

♦ *Dénombrement et suite*

Le nombre de naissances dans la lignée est 1 (couple initial) au 1^{er} trimestre, 1 encore (couple du précédent) au 2^e trimestre, puis 2 (couples des précédents) au 3^e.

A partir de ce 3^e trimestre, les naissances de tout trimestre proviennent de celles des trimestres précédent et antéprécédent, donc leur nombre est le total de celles de ces deux-là ; ainsi les totaux des naissances, des 12 trimestres des 3 ans forment la suite :

$$1, 1 + 1, 2 + 1, 3 + 2, 5 + 3, 8 + 5, 13 + 8, 21 + 13, 34 + 21, 55 + 34 \text{ et } 89 + 55$$

soit : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 .

Sur trois ans, depuis le couple de référence, la lignée atteint donc 752 lapins, car :

$$(1 + 1+ 2 + 3 + 5 + ... + 144) \times 2 = 752$$

ce qui n'est déjà pas si mal, mais certainenement inférieur à la réalité même "inorganisée", mais étrangère alors à la myxomatose.

Si l'élevage portait initialement sur n couples jumeaux nés ensemble, chacun des totaux de naissances ci-dessus serait multiplié par le naturel n, supérieur à un, et leur suite serait :

$$n, n, 2n, 3n, 5n, 8n, 13n, 21n, 34n, 55n, 89n, 144n$$

soit l'effectif de la lignée s'exprimerait par 752n.

Cette dernière suite, avec $n \in N^*$, est une partie de la suite de Fibonacci :

$$F = (n, n, 2n, 3n, 5n, 8n, 13n, 21n, 34n, 55n, 89n, 144n, 233n, 377n, 610n, 987n, ...$$

du nom de son "inventeur" Léonardo Fibonacci, nommé aussi Léonard de Pise, et non de Vinci, autre italien célèbre qui n'interviendra que près de trois siècles plus tard.

Aux environ de l'an 1200, entre autres activités arithmétiques, le riche commerçant Fibonacci se passionna, en effet, pour le chiffrage de la prolifération du Jeannot, et il aboutit, assez différemment de nous, à la présente suite.

Celle-ci est donc une suite infinie de naturels, qui débute par le couple identique et non nul (n, n), et se poursuit en admettant, pour chacun des composants, la somme des deux qui le précèdent, en quoi elle est récurrente et composée.

♦ *Le nombre d'or et sa présence*

Comme le fit Bonacci (pardon !), fort heureusement, formez, sur sa suite littérale limitée, les fractions successives de chaque composant à son précédent, et décimalisez chacune d'elles par division, éventuellement au 10 000^e et au mieux.

A l'aide de ces décimaux, rangez les fractions par valeurs croissantes, puis comparez ces valeurs à leur médiane, et cette dernière au Nombre d'Or, c'est-à-dire à l'irrationnel :

$$\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}6180.$$

Les onze premières fractions de Fibonacci, et leurs bonnes valeurs décimales, sont :

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$
1	2	1,5	$1{,}\overline{6}$	1,6	1,625	$1{,}61\bar{5}$	$1{,}61\bar{9}$	$1{,}61\overset{+}{8}$	$1{,}6\overline{18}$	$1{,}618\overset{+}{0}$

Le rangement puis la comparaison entre ces fractions s'établit ainsi, en leur adjoignant les différences de proximité.

$$\frac{1}{1} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \frac{55}{34} < \left|\frac{144}{89}\right| < \frac{89}{55} < \frac{34}{21} < \frac{13}{8} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

0,5 0,1 0,02 $0{,}00\bar{2}$ $0{,}000\bar{3}$ 0,00002 $0{,}000\overset{+}{9}$ $0{,}00\bar{6}$ $0{,}0\bar{4}$ $0{,}0\bar{3}$

Il apparaît que les fractions, de la suite partielle de Fibonacci, se rapprochent en valeurs de leur dernière, en oscillant de part et d'autre et de plus en plus vite ; en outre cette dernière fraction, de valeur médiane, est sensiblement égale au nombre d'Or, par sa valeur $1{,}618\overset{+}{0}$.

On déduit de cette comparaison que, lorsque leur nombre augmente, ces fractions successives tendent vers φ, ce qui d' ailleurs se démontre.

Bien loin de l'invasion des petits lapins blancs, on sait que le nombre d'Or apporte aux diverses œuvres d'art, par les proportions qui le respectent, de remarquables sensations esthétiques ; ces sensations émanent aussi de la nature, même humaine qui offre de nombreux exemples de ces mêmes proportions.

Il devient évident que la suite puis les fractions de Fibonacci, qui aboutissent à φ, produisent, par leur présence, les mêmes effets ; pour seul exemple, des mesures effectuées sur le corps hunain révèlent statistiquement que le rapport de sa taille t à la hauteur b de son nombril (centre vital) est tel que $8/5 < t/b < 13/8$: l'homme harmonieusement idéal à ce point de vue serait ainsi défini par le nombre d'Or.