Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :
- définir la négligeabilité et l'équivalence entre deux fonctions ☐
- donner et utiliser les développements limités de $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \ln(1+x)$; $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 ☐
- donner la formule de Taylor-Young et déterminer le développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ ☐

1 Comparaisons des fonctions : équivalents, négligeabilité

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définitions : soit f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a (réel ou ∞), • on dit que f est **équivalente à** g en a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et on note : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ • on dit que f est **négligeable devant** g en a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, et on note : $f(x) = o(g(x))$ pour x au voisinage de a	• $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ en effet $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} \to 1$ • pour x au voisinage de 0 : $x^3 = o(x^2)$ car $\dfrac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Remarques :

- « $f(x) = o(g(x))$ pour x au voisinage de a » sera aussi noté $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$
- deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point, sous réserve de l'existence de la limite en ce point d'une des deux fonctions ;
- dans la pratique pour démontrer l'équivalence ou la négligeabilité, on pourra étudier la limite du quotient ;
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ signifie aussi $f(x) = g(x) + o(g(x))$ pour x au voisinage de a
- $f(x) = o(1)$ signifie que f tend vers 0 au point considéré.
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ est équivalent à $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

Une autre écriture des croissances comparées des fonctions usuelles

Croissances comparées	**Ecriture avec des o**
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$	$\alpha \in \mathbb{R}$, pour x au voisinage de $+\infty, x^\alpha = o\left(e^x\right)$
Pour tout $\alpha > 0$, $\dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$	$\alpha > 0$, pour x au voisin. de $+\infty, \ln(x) = o\left(x^\alpha\right)$
Pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha \ln(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$	$\alpha > 0$, pour x au voisinage de $0, \ln(x) = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Remarques (hors programme) :

- si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ alors $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$
- toute fonction polynomiale est négligeable devant l'exponentielle en $+\infty$

Opérations sur les équivalents

Définitions et propriétés	**Exemples**
Propriétés : si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors • $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$ • $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ • avec $n \in \mathbb{Z}$, $(f_1(x))^n \underset{x\to a}{\sim} (g_1(x))^n$	• $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ donc $(x+1)e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^x$ • $\dfrac{x^2+8}{x-5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x$ car $x^2+8 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $x-5 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ • $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ donc $(x+1)^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$

On peut donc multiplier, diviser ou élever à une puissance des équivalents mais

⚠ **ne pas additionner, soustraire ou composer des équivalents.**

Manipulation des o : dans une égalité, on ne fera apparaître qu'un seul o

2 Développements limités, formule de Taylor-Young

Définitions et propriétés	**Interprétation graphique**
Définitions et propriété : un **développement limité** (DL) à l'ordre n d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 est l'écriture de f sous la forme : DL à l'ordre $n=0$: $f(x) = \lambda_0 + o(1)$ DL à l'ordre $n=1$: $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-x_0) + o(x-x_0)$ DL à l'ordre $n=2$: $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-x_0) + \lambda_2(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$ $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont appelés **coefficients** du développement, et un tel développement, s'il existe, est unique.	Un développement limité peut être considéré comme une approximation de la fonction en un point, à l'ordre 0 : par la valeur de la fonction en ce point ($\lambda_0 = f(x_0)$) à l'ordre 1 : par une droite qui est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point à l'ordre 2 : par un polynôme du second degré
Propriété - formule de Taylor-Young : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 alors pour x au voisinage de x_0 : $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$	Remarque : souvent $x_0 = 0$ avec $f(x) = e^{3x+1}$ et en 0 $f(x) = e + 3ex + \dfrac{9e}{2}x^2 + o(x^2)$

Développements limités et équivalents usuels

Développements limités pour x au voisinage de 0	**Equivalents** (déduits des DL)
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$	$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

Nota bene : le DL à l'ordre 1 (ou à l'ordre 0) peut être obtenu en tronquant le DL à l'ordre 2