ECG 2 - maths appli. **Devoir en temps libre n°1** Pour le 15 septembre 2025

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

1. Déterminer les variations de f, préciser son maximum et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Etudier la convexité de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f
3. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire le tableau des variations de f' sur $\mathbb{R}_+$
4. Soit n un entier, $n \geqslant 1$
   Montrer que l'équation $f(x) = nx$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n
   Puis vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$
5. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
6. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def u(n):` permettant de trouver une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$
2. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$
3. Etablir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$
4. On pose, pour $x > 0$, $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$
   a. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $g(x)$
   b. En déduire un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers 0
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$
6. Déterminer les variations de g puis en déduire celles de f. Préciser la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
7. Tracer l'allure de la courbe représentative de f
8. Avec Python, définir la fonction f puir la représenter sur un intervalle au choix (choix à justifier).