Corrigés, a minima des exercices non corrigés en classe.

Exercice 6

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

On peut tâtonner pour trouver une formule : en notant f la fonction,
on trouve $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ puis $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ puis $f^{(3)}(x) = \dfrac{-2 \times 3}{x^4}$ puis $f^{(4)}(x) = \dfrac{2 \times 3 \times 4}{x^5}$
On peut alors émettre une conjecture pour la formule,
on pose pour $n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(1)}(x) = \dfrac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = \dfrac{-1}{x^2}$ ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie
donc par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$
donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}{}'(x) = (-1)^n n! \times (-(n+1))x^{-(n+1)-1}$
i.e. $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times (-1) \times (n+1)x^{-(n+2)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$ donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie

Exercice 8

Remarque préliminaire : il s'agit d'étendre ici l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (cf. cours de première année) à l'addition de n nombres réels.

1. Montrer par récurrence que, pour n ($n \geqslant 2$) réels $x_1, \dots x_n$:
$$|x_1 + x_2 + \dots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, P(n) : \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1 + x_2 + \dots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$

Initialisation : d'après l'inégalité triangulaire évoquée plus haut, $P(2)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie
soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose $a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $b = x_{n+1}$
alors d'après l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
i.e. $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}| \leqslant |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}|$
or par hypothèse de récurrence $|x_1 + x_2 + \dots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$
donc $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n| + |x_{n+1}|$
et a fortiori $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n| + |x_{n+1}|$ i.e. $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, P(n)$ est vraie

2. Montrer que, pout tout couple de réels (x, y) : $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$

Remarque. On a aussi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x + y|$

On utilise l'inégalité triangulaire en posant $a = x - y$ et $b = y$, on obtient alors :
$|x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$ i.e. $|x| \leqslant |x - y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$
de même en posant $a = y - x$ et $b = x$:
$|y - x + x| \leqslant |y - x| + |x|$ i.e. $|y| \leqslant |y - x| + |x|$ et donc $|y| - |x| \leqslant |x - y|$
car $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$
or $\Big||x| - |y|\Big| = |x| - |y|$ ou $\Big||x| - |y|\Big| = |y| - |x|$
mais dans tous les cas, on a montré que $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$

Exercice 9

On pose, pour $x \in [0,1[$, $f(x) = -\ln(1-x)$ et $g(x) = f(x) - \lfloor f(x) \rfloor$

1. Déterminer les variations de f. Préciser sa limite en 1

f est dérivable (composition de fonctions dérivables) et $\forall x \in [0,1[, f'(x) = -\dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$
or $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$ donc $\forall x \in [0,1[, f'(x) > 0$ donc f est (strictement) croissante
par ailleurs $\lim\limits_{x\to 1} 1 - x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$
donc par composition, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

2. Justifier que f est bijective de $[0,1[$ vers un intervalle J à préciser et déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$

f est strictement croissante et continue (car dérivable) donc f réalise une bijection de $[0;1[$ dans $\left[f(0), \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right[= [0, +\infty[$ car $f(0) = -\ln(1) = 0$

Nota bene : comme on va déterminer la réciproque ci-dessous, le recours au théorème de la bijection ci-dessus n'était pas nécessaire.

On va appliquer la méthode pour déterminer la réciproque :
soit $y \in [0, +\infty[$, alors $\exists x \in [0;1[, f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in [0;1[, -\ln(1-x) = y$
$\Leftrightarrow \exists x \in [0;1[, \ln(1-x) = -y$
$\Leftrightarrow \exists x \in [0;1[, 1 - x = e^{-y}$ car $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
finalement $\forall y \in [0, +\infty[$, alors $\exists x \in [0;1[, f(x) = y \Leftrightarrow x = 1 - e^{-y}$
on vérifie que l'antécédent trouvé est bien dans l'ensemble de définition de f : en effet $y \geqslant 0 \Rightarrow -y \leqslant 0 \Rightarrow 0 < e^{-y} \leqslant e^0$ car l'exponentielle est croissante et strictement positive, i.e. $0 < e^{-y} \leqslant 1$
donc $0 > -e^{-y} \geqslant -1$ et enfin $1 > 1 - e^{-y} \geqslant 0$ i.e. $1 - e^{-y} \in \mathscr{D}_f = [0;1[$
cela signifie que tout élément de $[0, +\infty[$ admet un unique antécédent par f (dans $[0,1[$) et que cet antécédent est $1 - e^{-y}$, autrement dit f est bijective et sa bijection réciproque est
$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0;1[\\ y & \mapsto & 1 - e^{-y} \end{array}$

3. Justifier que, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) \in [0,1[$

Par définition de la partie entière, $\forall x \in [0;1[, \lfloor f(x) \rfloor \leqslant f(x) < \lfloor f(x) \rfloor + 1$
donc $0 \leqslant f(x) - \lfloor f(x) \rfloor < 1$ i.e. $g(x) \in [0;1[$

4. Soit $\alpha \in [0,1[$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $g(x) \leqslant \alpha$ (*difficile*)

Soit $x \in [0;1[$, alors $g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow 0 \leqslant g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) - \lfloor f(x) \rfloor \leqslant \alpha$
$\Leftrightarrow \lfloor f(x) \rfloor \leqslant f(x) \leqslant \lfloor f(x) \rfloor + \alpha$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant f(x) \leqslant n + \alpha$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f^{-1}(n) \leqslant f^{-1}(f(x)) \leqslant f^{-1}(n+\alpha)$
car la réciproque d'une fonction bijective a le même sens de variation
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, 1 - e^{-n} \leqslant x \leqslant 1 - e^{-(n+\alpha)}$
finalement $g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow x \in \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[1 - e^{-n}, 1 - e^{-(n+\alpha)}\right]$
il s'agit donc de la réunion d'une infinité d'intervalles

5. On rappelle que la commande `rd.rand(n)` renvoie un tableau à n colonnes contenant des nombres choisis aléatoirement entre 0 et 1
Que fait le programme Python ci-contre ?

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
Y=-np.log(1-rd.rand(1000))
Z=Y-np.floor(Y)
L=0
for z in Z:
  if z<= 0.5:
  L=L+1
print(L/1000)
```

Le programme cherche à donner la probabilité que $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ en étudiant 1 000 « valeurs » de la fonction g générées aléatoirement. Concrètement, il commence par créer une liste `Y` de 1 000 images par f dont les abscisses sont tirées aléatoirement (dans $[0;1[$), puis il créé la liste `Z` des valeurs correspondantses pour la fonction g. Enfin avec une boucle il calcule le nombre de valeurs de `Z` inférieures ou égales à $\dfrac{1}{2}$ et donne la fréquence pour laquelle $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$