Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :
- utiliser le théorème du point fixe ☐
- utiliser la négligeabilité et l'équivalence entre deux suites ☐
- reconnaitre et exploiter les séries de Riemann : $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ ☐
- déterminer la nature de séries à l'aide des théorèmes des comparaison ☐

1 Compléments sur les suites : suites récurrentes

1.1 Théorème du point fixe

Dans cette partie **1.1**, une suite u désigne une suite récursive (définition de type $u_{n+1} = f(u_n)$).

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définition : un **point fixe** pour une fonction f est une solution de l'équation $f(x) = x$	la fonction carré admet 0 et 1 pour points fixes
Propriété : si f est continue et si u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge, alors la limite ℓ de u est un point fixe de f	u définie par $u_{n+1} = u_n^2$ ne peut converger que vers 0 ou 1

Remarque :
- conséquence pratique, si f est continue et dès lors que l'existence d'une limite finie est démontrée, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$
- ⚠ un point fixe, même unique, n'implique pas la convergence ;
- pas de point fixe implique pas de convergence possible.

Méthode : **pour déterminer un point fixe**, on peut résoudre l'équation directement ou étudier la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection (pour trouver des solutions à $g(x) = 0$).

1.2 Comparaisons de suites : négligeabilité, équivalence

On compare les suites comme on compare les fonctions, sachant que l'indice n tend toujours vers $+\infty$

Définitions : avec u et v deux suites ne s'annulant pas, • on dit que u et v sont **équivalentes** et on note $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ • on dit que u **est négligeable devant** v et on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	• $n^2 + 1 \sim n^2$ car $\frac{n^2+1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ • $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Remarque : pour les équivalents, on pourra faire les mêmes opérations que pour les fonctions.

Ecriture des croissances comparées avec la négligeabilité :

$$\left.\begin{array}{l} \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 0,\ \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta} \to 0 \Leftrightarrow (\ln(n))^\alpha = o\left(n^\beta\right) \\ \text{avec } \beta > 0 \text{ et } a > 0,\ \frac{n^\beta}{e^{an}} \to 0 \Leftrightarrow n^\beta = o\left(e^{an}\right) \end{array}\right\} \text{ et on déduit des deux précédentes : } \frac{(\ln(n))^\alpha}{e^{an}} \to 0 \Leftrightarrow (\ln(n))^\alpha = o\left(e^{an}\right)$$

2 Compléments sur les séries

2.1 Compléments sur les séries de référence : les séries de Riemann

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définition : les séries de Riemann sont les séries du type $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont des séries de Riemann
Propriété : la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ de plus si $\alpha \leqslant 1$, la série diverge vers $+\infty$	• $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergent • $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent

Remarques :

- si $\alpha \leqslant 1$ la divergence vers $+\infty$ découle du « théorème de la limite monotone » sur les séries à termes positifs ;
- si $\alpha \leqslant 0$, la série est même grossièrement divergente ;
- la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la série de Riemann « charnière » ;
- contrairement aux autres séries de référence, nous ne disposons pas de formule pour les sommes (limites) des séries de Riemann dans les cas convergents. Elles seront donc plutot utilisées pour des comparaisons (cf. plus bas).

2.2 Comparaisons de séries à termes positifs

Théorèmes de comparaison : pour deux suites u et v **à termes positifs** : • si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ *Rappel* ▷ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ▷ si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge si de plus u et v **ne s'annulent pas** • si $u = o(v)$ ▷ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ▷ si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge • si $u \sim v$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	• $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{e^n + n^2}$ converge car $0 \leqslant \frac{1}{e^n+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge • $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge car $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ (à dém.) et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (et termes positifs) • $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}$ converge car $\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ (et ...) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\ln(n)+n}$ diverge car $\frac{1}{\ln(n)+n} \sim \frac{1}{n}$

Remarques :

- dans le cas où les termes sont négatifs (tous ou en partie), on pourra s'intéresser à $\sum |u_n|$ et utiliser que la convergence absolue de la série implique la convergence ;
- cas particulier des séries de Riemann :
  ▷ si $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge et si $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \leqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge ;
  ▷ si $n^{-\alpha} u_n$ est bornée, avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.