Exercices types : suites récurrentes

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unités : 2cm en abscisse, 10cm en ordonnée).

1. **a.** Montrer que la fonction f est paire.

On pourra justifier et utiliser ici l'écriture : $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

b. Etudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

c. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f

2. **a.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$

b. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution ℓ et que $0 < \ell < \dfrac{1}{2}$

3. On définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$u_0 = 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

e. Ecrire une fonction Python donnant une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 2

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = x - \dfrac{1}{4}\left(x^2 + \ln(x)\right)$

On notera I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

1. Etude de f sur I

a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Déterminer une fonction g telle que, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{4x}$

b. Etudier la fonction g, et montrer que, pour $x \in I$, $0 < g(x) \leqslant 1$

c. En déduire que, pour $x \in I$, $0 < f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, puis établir le tableau des variations de f sur I

d. On pose, pour $x > 0$, $h(x) = f(x) - x$. Etudier la fonction h sur I et en déduire que f admet un point fixe dans I, noté a

2. Etude d'une suite récurrente

a. Justifier que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bien définie.

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$: $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - a|$

c. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la convergence de la suite u

d. Ecrire une fonction Python d'en-tête : `approximation(p)` donnant un rang n à partir duquel u_n approche a à 10^{-p} près, où $p \in \mathbb{N}$ est un paramètre.

Séries de Riemann et séries télescopiques

Exercice 3

Dire si les séries suivantes convergent en comparant les termes généraux à des séries de référence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n-\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+\ln(n)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{1+n^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n\ln(n)}{1+n^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n!}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln(n)}{1+n^2}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\right)$

Exercice 4

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k(k+1)}$ converge.
2. Vérifier que, pour $k>0$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$
3. En utilisant les sommes partielles, déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$
4. Justifier que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$, puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant 2$

Exercice 5

Dans cet exercice, on note $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1. Justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que, pour $k\in\mathbb{N}^*$, et $x\in[k,k+1]$: $\displaystyle\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{k}$
   En déduire que : $\displaystyle\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}$
3. Déduire de la relation précédente que, pour tout entier $n\geqslant 2$: $S_n-1\leqslant\ln(n)\leqslant S_{n-1}$
   On pourra faire une somme pour k allant de 1 à $n-1$
4. Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$: $\displaystyle\ln(n)+\frac{1}{n}\leqslant S_n\leqslant\ln(n)+1$
5. En déduire un équivalent simple de S_n quand $n\to+\infty$

Rappels sur les suites (séries) rencontrées en première année

Suites (séries) géométriques et assimilées

Exercice 6

Soit $\lambda\in]0,1[$, calculer successivement $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}k\lambda^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\lambda^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\lambda^k$

En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k},\qquad B=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{2^{k+1}},\qquad C=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$$

Exercice 7 - suite arithmético-géométrique

On pose $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$

Soit c le réel tel que $c = -\dfrac{1}{2}c + \dfrac{1}{2}$

1. Déterminer le réel c
2. Montrer que la suite v définie par $v_n = u_n - c$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique ; on précisera sa raison.
3. Montrer que v converge, puis que u converge.
4. Exprimer u_n en fonction de n

Exercice 8 - suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit u la suite définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
On note a, b les solutions de l'équation $x^2 = x + 1$ avec $b < 0 < a$

1. Montrer, par récurrence, que u_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Déterminer a et b. Montrer que $1 < a < 2$ et que $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$
4. Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes :
$$\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}, \qquad \sum n\frac{u_n}{2^{n+1}}, \quad \sum n^2\frac{u_n}{2^{n+1}}$$
5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$

Suites définies à l'aide d'intégrales (classique à Edhec)

Exercice 9 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(n+1)I_n = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$
3. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$
En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$

Fonction définie comme une série (classique à tous les concours

Exercice 10

Dans tout l'exercice, x désignera un réel de $[0, 1[$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$
3. Justifier que :
pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant -x^n \ln(1-x)$.
4. En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ converge et que :
$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$

Convergence et comportement asymptotique de suites et séries

Exercice 11

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Exercice 12

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha > 0$, $u_n = (e^{1/n} - 1)^\alpha$
Déterminer la limite et un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$
La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? (on discutera suivant les valeurs de α)

Exercice 13

Soit u et v les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

1. Montrer que u et v sont adjacentes et préciser leur limite commune ℓ
2. Ecrire une fonction Python d'en tête `def approx(p):` permettant de calculer ℓ à 10^{-p} près à l'aide de u et/ou de v, où $p \in \mathbb{N}$ est un paramètre.

Exercice 14

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^n + nx - 1$

1. Etudier, pour n fixé, la fonction f_n (variations, limites).
   En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera cette solution u_n
2. Déterminer u_1 et u_2
3. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

   En déduire que $0 < u_n < \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 2$
4. Montrer que $u_n^n \to 0$. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$
5. Déterminer les natures des séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$

Exercice 15

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

$$v_n = u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad w_n = u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1. Calculer u_n pour $n \in \{0, \dots 4\}$
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite L
3. Montrer que v et w sont adjacentes et de limite L