

Corrigés, a minima des exercices non abordés en classe

Exercices types : suites récurrentes

Exercice 2

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln(x))$

On notera I l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

1. Etude de f sur I a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Déterminer une fonction g telle que, pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{4x}$

f est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) là où elle est définie, par opérations de fonctions $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) de plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(2x + \frac{1}{x}\right) = \frac{4x}{4x} - \frac{2x^2 + 1}{4x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} = \frac{g(x)}{4x}$ où $g(x) = -2x^2 + 4x - 1$

b. Etudier la fonction g , et montrer que, pour $x \in I$, $0 < g(x) \leq 1$

$$\forall x \in I, g'(x) = -4x + 4 = 4(1 - x) > 0 \text{ car } x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \geq 0$$

donc g est croissante sur I et donc $\forall x \in I, g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1)$

$$\text{or } g\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{1}{2} \text{ et } g(1) = -2 + 4 - 1 = 1$$

donc $\forall x \in I, \frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$ et a fortiori $0 < g(x) \leq 1$

c. En déduire que, pour $x \in I$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$, puis établir le tableau des variations de f sur I

Pour $x \in I, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ donc $2 \leq 4x \leq 4$ et donc en appliquant la fonction inverse qui est

décroissante sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{2}$

puis en multipliant cette inégalité avec celle démontrée en 1.b. (tous les termes étant positifs), on trouve $0 < g(x) \times \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{2}$ (l'inégalité reste stricte en 0 car aucun de deux facteurs ne peut être nul) i.e. $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ donc f est croissante sur I , par ailleurs :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{3 + 2\ln(2)}{8}$$

et $f(1) = 1 - \frac{1}{4}(1 + \ln(1)) = \frac{3}{4}$ d'où le tableau

x	$\frac{1}{2}$	1
f	$\frac{3 + 2\ln(2)}{8}$	$\frac{3}{4}$

d. On pose, pour $x > 0$, $h(x) = f(x) - x$. Etudier la fonction h sur I et en déduire que f admet un point fixe dans I , noté a

h est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) car f l'est et $x \mapsto -x$ également et $\forall x > 0, h'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{4} \left(2x + \frac{1}{x} \right)$
donc $h'(x) < 0$ car $x < 0$ donc h est strictement décroissante sur I , et h est continue (car dérivable), donc d'après le théorème de la bijection :
 h réalise une bijection de $I = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ sur $\left[h\left(\frac{1}{2}\right), h(1) \right] = \left[-\frac{1}{4}, \frac{-1 + 2 \ln(2)}{8} \right]$
car $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3 + 2 \ln(2)}{8} - \frac{4}{8} = \frac{-1 + 2 \ln(2)}{8}$ et $h(1) = f(1) - 1 = \frac{3}{4} - 1$
de plus $-1 + 2 \ln(2) = -1 + \ln(4) > 0$ car $4 > e$ donc par stricte croissance $\ln(4) > \ln(e) = 1$
et donc $\frac{-1 + 2 \ln(2)}{8} > 0$, donc $0 \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{-1 + 2 \ln(2)}{8} \right]$, donc 0 admet un unique antécédent par h i.e. l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une unique solution, i.e. f admet un unique point fixe dans I

2. Etude d'une suite récurrente

- a. Justifier que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bien définie.

Par récurrence! mais on va préciser le résultat car $u_n > 0$ qui est suffisant pour la bonne définition ne suffira pas pour la suite, donc on va montrer $u_n \in I$

On pose pour $n \in \mathbb{N}, P(n) : \ll u_n \text{ est défini et } u_n \in I \gg$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

donc par hypothèse, $u_n > 0$ donc $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien défini

par ailleurs $u_n \in I$ donc d'après l'étude de f en **1.c** alors $\frac{3 + 2 \ln(2)}{8} \leq f(u_n) \leq \frac{3}{4}$

or comme vu plus haut $2 \ln(2) \geq 1$ donc $3 + 2 \ln(2) \geq 4$

et donc $\frac{3 + 2 \ln(2)}{8} \geq \frac{1}{2}$ donc finalement $\frac{1}{2} \leq f(u_n) \leq 1$

i.e. $u_{n+1} \in I$ et donc $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

- b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que,

pour tout entier $n \geq 0 : |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$

D'après la question **1.c.**, $\forall x \in I, 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ et donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$

donc pour $n \in \mathbb{N}$, avec $b = u_n$ et a défini à la question **1.d.**, on a bien $a \in I$ et par ailleurs $b \in I$ grâce à l'inégalité démontrée à la question précédente

donc $|f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$ i.e. $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$ car par définitions, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(a) = a$

- c. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$, et en déduire la convergence de la suite u

Grâce à cette inégalité « récursive » démontrée en **2.b.**, on peut alors démontrer par récurrence l'inégalité demandée, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_0 - a| \leq \frac{1}{2^0} \Leftrightarrow 1 - a \leq 1$ car $u_0 = 1$ et $a \leq 1$; ce qui est vrai car $a > 0$ donc $1 - a \leq 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
donc par hypothèse, $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\frac{1}{2}|u_n - a| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
or d'après **2.c.** $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$ donc a fortiori $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, i.e. $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$
or $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ (forme q^n avec $|q| = \frac{1}{2} < 1$) et $0 \leq |u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$
donc par théorème des gendarmes $|u_n - a| \rightarrow 0$ i.e. $u_n \rightarrow a$

- d. Ecrire une fonction Python d'en-tête : **approximation(p)** donnant un rang n à partir duquel u_n approche a à 10^{-p} près, où $p \in \mathbb{N}$ est un paramètre.

On calcule $\frac{1}{2^n}$ de manière itérative jusqu'à ce que cela devienne inférieur ou égal à 10^{-p} ce qui garantit alors $|u_n - a| \leq 10^{-p}$ et donc $u_n - 10^{-p} \leq a \leq u_n + 10^{-p}$

```
n=0
while 1/2**n>10**(-p):
    n=n+1
print(n)
```

Séries de Riemann et séries télescopiques

Exercice 5

Dans cet exercice, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Justifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge. Quelle est sa limite ?

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série de Riemann avec $\alpha = 1$ dite « série harmonique », on sait par propriété du cours que cette série diverge et c'est forcément vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone sur les séries à termes positifs.

2. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [k, k+1]$: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

En déduire que : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [k, k+1]$ alors $k \leq x \leq k+1$ et donc par application de la fonction inverse qui est décroissante sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

on pose $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et en posant $I = [k, k+1]$, d'après l'inégalité précédente

$$\forall x \in I, \frac{1}{k+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k}$$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $a = k$ et $b = k+1$, on obtient :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \text{ i.e. } (k+1-k)\frac{1}{k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq (k+1-k)\frac{1}{k}$$

soit $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ et ceci est valable quel que soit l'intervalle $I = [k, k+1]$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

3. Dédurre de la relation précédente que, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$
On pourra faire une somme pour k allant de 1 à $n-1$

Soit $n \geq 2$, comme indiqué, on additionne les inégalités démontrées précédemment :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_{n-1} \text{ et par changement d'indice } (i = k+1), \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1 = S_n - 1$$

$$\text{et par télescopage } \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

$$\text{d'où, finalement, } S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

D'après la double inégalité précédente, pour $n \geq 2$, d'une part $S_n - 1 \leq \ln(n)$ donc $S_n \leq \ln(n) + 1$ et d'autre part $\ln(n) \leq S_{n-1}$ donc $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_{n-1} + \frac{1}{n}$ i.e. $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n$ car $S_{n-1} + \frac{1}{n} = S_n$ d'où, en assemblant, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$ ce qui est vrai aussi pour $n = 1$ car $S_1 = 1$

5. En déduire un équivalent simple de S_n quand $n \rightarrow +\infty$

La question précédente nous fait comprendre que $S_n \ll$ « croît au rythme de $\ln(n)$ », on va donc montrer que c'est l'équivalent recherché :

d'après l'inégalité précédente, et pour $n \geq 2$ (pour éviter la division par $\ln(1)$) :

$$\frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \text{ i.e. } 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1$$

or d'après les limites usuelles, $n \ln(n) \rightarrow 0$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\frac{S_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$ i.e. $S_n \sim \ln(n)$

Nota bene : on a donc montré la divergence (vers $+\infty$) de la série harmonique

Rappels sur les suites (séries) rencontrées en première année

Suites (séries) géométriques et assimilées

Exercice 8 - suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit u la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et pour } n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On note a, b les solutions de l'équation $x^2 = x + 1$ avec $b < 0 < a$

1. Montrer, par récurrence, que u_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par récurrence ! Il s'agit ici d'une récurrence double, puisqu'il faut une information sur deux rangs pour en déduire le rang suivant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n \in \mathbb{N}$

Initialisation : elle se fait sur deux rangs pour la récurrence double, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

Hérédité : ici l'hypothèse se fait sur deux rangs, soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies

par hypothèse, $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$ alors de manière évidente $u_n + u_{n+1} \in \mathbb{N}$ i.e. $u_{n+2} \in \mathbb{N}$ et donc $P(n+2)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

2. Déterminer a et b . Montrer que $1 < a < 2$ et que $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$

$x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions ($\Delta = 5$) qui sont $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

on retrouve $b < 0$ car $5 > 1 \Rightarrow \sqrt{5} > \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$
par ailleurs $4 < 5 < 9$ donc de même $\sqrt{2} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ i.e. $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$ et

donc $\frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{4}{2}$ i.e. $\frac{3}{2} < a < 2$ et a fortiori $1 < a < 2$

enfin d'une part, $1 - a = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = b$ et d'autre part :

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2}{1 + \sqrt{5}} = -\frac{2 \times (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = -\frac{2 \times (1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = b$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$

$x^2 - x - 1$ est l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc par propriété sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n + \mu b^n$

de plus d'une part $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et d'autre part $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda a + \mu b$ donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda a + \mu b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu(b - a) = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = \frac{1}{b - a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{b - a} \\ \mu = \frac{1}{b - a} \end{cases}$$

or par définition de a et $b, b - a = \frac{1 - \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$ d'où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

finalement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}a^n - \frac{1}{\sqrt{5}}b^n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$

4. Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}, \quad \sum n \frac{u_n}{2^{n+1}}, \quad \sum n^2 \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$

Convergence et comportement asymptotique de suites et séries

Exercice 15

On pose, pour $n \in \mathbb{N} : u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

$$v_n = u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad w_n = u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1. Calculer u_n pour $n \in \{0, \dots, 4\}$

Par définition : $u_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} = 1, \quad u_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = 0$

$$u_2 = \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } u_4 = \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite L

Par propriété $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série exponentielle pour $x = -1$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^{-1}

3. Montrer que v et w sont adjacentes et de limite L

Par définition :

$$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

d'après la relation de Chasles

$$\text{donc } v_{n+1} - v_n = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} = -\frac{2n+2}{(2n+2)(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} = -\frac{2n+1}{(2n+2)!}$$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

$$\text{et de manière analogue } w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} = \frac{2n+3-1}{(2n+3)!} = \frac{2n+2}{(2n+3)!}$$

donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ i.e. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

$$\text{enfin } w_n - v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{(2n+1)!}$$

or $(2n+1)! = (2n+1)(2n)! \geq 2n+1 \geq 1$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)! = +\infty$ donc par

quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = 0$ et donc $w_n - v_n \rightarrow 0$

finalement les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite

de plus $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une « suite extraite » de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (cette notion est hors programme) et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle converge vers la même limite (cette propriété est également hors programme), i.e. $L = e^{-1}$ (donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également).