

Sujet d'entraînement n°1

D'après Ecricome 2022, exercice 2 (sur 3)

Eléments de corrigé.

Partie II.

Partie I.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ par opérations

2. a) $h'(x) = \frac{1}{x} + 2$ et $h'(x) > 0$ pour $x > 0$.

b) $\lim_{0^+} h = -\infty$ et $\lim_{+\infty} h = +\infty$

Théorème de la bijection : h est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ d'après les limites. Enfin $0 \in h(\mathbb{R}_+^*)$ donc il existe un seul réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$

$h(1/2) = -\ln(2) < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc $1/2 < \alpha < 1$

c) Calcul.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

d)

Remarque : $\ln(\alpha) = 1 - 2\alpha$ donc $g(\alpha) = \exp\left(-\frac{(2\alpha-1)^2}{\alpha}\right)$, en particulier, $0 < g(\alpha) < 1$

3. $g(x) = x^{2-1/x}$ donc $g(x) - x^2 = x^2 \left(x^{-1/x} - 1\right) = x^2 \left(e^{-\ln(x)/x} - 1\right)$

comme, par croissances comparées, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on peut utiliser les

équivalents usuels : $\exp(X) - 1 \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ i.e. $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\exp(X) - 1}{X} = 1$ donc par

composition avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$

on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1}{-\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ i.e. $\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$

donc par produit $g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 \frac{\ln(x)}{x} = -x \ln(x)$

4. On définit, pour $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n : u_n > 0$

• $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, u_n soit un réel strictement positif.

alors $g(u_n) = \exp(\dots)$ est aussi un réel positif, et on définit ainsi le réel $u_{n+1} > 0$, d'où le résultat.

5. Par exemple :

```
import numpy as np
def u(n, u0):
    valeur=u0 # valeur initiale
    liste=[valeur]
    for i in range(1,n+1):
        valeur=np.exp((2-1/valeur)*np.log(valeur)) # calcule le
        terme suivant
        liste.append(valeur) # augmente la liste u d'une valeur
    return liste
```

6. a) Pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et pour $0 < x < 1$, $\ln(x) < 0$, donc $(x-1)$ et $\ln(x)$ sont de même signe, et donc $\forall x > 0, (x-1)\ln(x) \geq 0$

b) $g(x) = x^{2-1/x}$ et $\frac{g(x)}{x} = x^{1-1/x} = x^{(x-1)/x} = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)$

comme $(x-1)\ln(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, $\frac{g(x)}{x} \geq 1$

c) Il suffit de préciser nos propos plus haut, on pouvait remarquer dans les questions précédentes que, pour $x > 0, x \neq 1, (x-1)\ln(x) > 0$ et donc

$\frac{g(x)}{x} > 1$, soit $g(x) > x$ et pour $x = 1$, on a évidemment $g(x) = x$,

donc l'équation $g(x) = x$ admet pour unique solution $x = 1$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \geq 0$ donc u est croissante.

8. a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 \geq \frac{1}{2}$ car u est croissante.

Montrons par récurrence que $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

• Pour $n = 0, u_0 \leq 1$ par hypothèse.

• Si, pour $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$, alors $\ln(u_n) \leq 0$

D'autre part, $2u_n - 1 \geq 0$ car $u_n \geq 1/2$,

donc $\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n) = \frac{2u_n - 1}{u_n} \ln(u_n) \leq 0$

d'où : $\exp\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n) \leq 1$ et $u_{n+1} \leq 1$, soit le résultat cherché par récurrence.

- b) u est croissante et majorée par 1, donc converge vers un réel $\ell \leq 1$ (théorème de la limite monotone et passage à la limite dans l'inégalité).
comme $u_0 \geq 1/2$ on a aussi $\ell \geq u_0 \geq 1/2$
comme g est continue, d'après le théorème du point fixe : $g(\ell) = \ell$

Conclusion : ℓ est un point fixe de g donc $\ell = 1$ d'après la question 6c)

9. a) u est croissante et $u_0 > 1$ donc $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
b) Si u est convergente, sa limite ℓ vérifierait $\ell \geq u_0 > 1$ car u est croissante.
Comme g est continue, d'après le théorème du point fixe, on aurait $g(\ell) = \ell$
Le seul point fixe de g étant 1 d'après la question 6c), on aurait $\ell = 1$ et ceci contredit $\ell \geq u_0 > 1$

Conclusion : u est croissante et non convergente, donc $\lim u = +\infty$
d'après le théorème de la limite monotone.

10. Si $0 < u_0 < 1/2$, $2u_0 - 1 < 0$, $\ln(u_0) < 0$ donc $\left(2 - \frac{1}{u_0}\right) \ln(u_0) > 0$ et $u_1 > 1$.

On est ramené au cas précédent (avec un premier terme > 1) et donc

$$\lim u = +\infty$$

Partie III.

On note $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

11. Les fonction $(x, y) \mapsto \ln(x)$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ sont C^2 sur Ω par composition, donc
 $(x, y) \mapsto \left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)$ est C^2 sur Ω par opérations, et finalement f est de classe C^2 sur Ω par composition avec l'exponentielle.

12. Calcul.

13. f ne s'annule pas, donc $\partial_2 f(x, y) = 0$ si, et seulement si $\ln(x) = 0$ soit $x = 1$
Dans ce cas, $\partial_1 f(1, y) = 0$ si, et seulement si $y = 1$, d'où :

$$a = (1, 1) \text{ est le seul point critique de } f$$

14. Calculer les dérivées secondes en (x, y) quelconque peut amener à de nombreuses erreurs de calcul, mais c'est faisable.

Pour calculer la matrice Hessienne, on peut aussi procéder ainsi :

- calcul de $\partial_{2,2}^2 f(1, 1)$.
 $\partial_{2,2}^2 f(1, 1)$ se calcule en dérivant $h_2(y) = \partial_2 f(1, y) = 0$ par rapport à y et en prenant $y = 1$, donc ici $\partial_{2,2}^2 f(1, 1) = 0$ est direct.

- calcul de $\partial_{2,1}^2 f(1, 1)$
 $\partial_{2,1}^2 f(1, 1)$ se calcule en dérivant $h_1(y) = \partial_1 f(1, y) = y - 1$ par rapport à y et en prenant $y = 1$, donc on a immédiatement $\partial_{2,1}^2 f(1, 1) = 1$

- du théorème de Schwarz : $\partial_{1,2}^2 f(1, 1) = 1$

- calcul de $\partial_{1,1}^2 f(1, 1)$ $\partial_{1,1}^2 f(1, 1)$ se calcule en dérivant $h_3(x) = \partial_1 f(x, 1) = \frac{q_1(x)q_2(x)}{x^2}$ par rapport à x et en prenant $x = 1$, où on a posé $q_1(x) = \ln(x) + x - 1$ et $q_2(x) = f(x, 1)$

on peut remarquer que $q_2'(x) = \partial_1 f(x, 1)$ donc $q_2'(1) = 0$ (point critique).

Comme $h_3'(x) = q_1'(x)q_2(x) + q_1(x)q_2'(x)$, on obtient $h_3'(1) = q_1'(1)q_2(1)$

Reste à calculer : $q_2(1) = f(1, 1) = 1$, et $q_1'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} + 1\right) -$

$\frac{2}{x^3} (\ln(x) + x - 1)$, donc $q_1'(1) = 2$ et $\partial_{1,1}^2 f(1, 1) = 2$

- conclusion : $\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\nabla^2 f(1, 1)$ est symétrique donc diagonalisable, donc semblable à une matrice diagonale $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

$\lambda \in \text{Sp}(\nabla^2 f(1, 1))$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, donc

si, et seulement si : $(2 - \lambda)(-\lambda) - 1 = 0$

ce qui donne $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

on sait que cette équation admet pour solutions λ_1 et λ_2 , et les relations coefficients/racines donnent $\lambda_1 \lambda_2 = -1 < 0$

Conclusion : $\nabla^2 f(1, 1)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés,

$(1, 1)$ correspond à un point selle (ou col).

16. f n'a pas d'extremum local, donc pas non plus d'extremum global.