

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.

Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - échauffement

Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, et $u_3 = (2, 3, 2)$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \ln(1+x)$

Par ailleurs, on pose $a_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < f(x) < x$
2.
 - a. En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante et strictement positive.
 - b. Quelle est la limite ℓ de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3.
 - a. Déterminer un équivalent de $x - \ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0
 - b. Déterminer un équivalent de $x \ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0
 - c. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$
 - a. Quelle est la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$?
 - b. On admet le résultat suivant :

si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers ℓ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ell$

Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} b_k$ et en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 2$

- c. En déduire un équivalent simple de a_n quand n tend vers $+\infty$ et déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$

Exercice 3

On rappelle que $e \approx 2,7$ et $e^2 \approx 7,4$ à 10^{-1} près.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que f est dérivable en 0
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
4. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire les variations de f
5. Justifier que f admet un maximum m vérifiant $\frac{1}{2} < m < 1$
6. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
7. Etudier la convexité et les éventuels points d'inflexion de f
8. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f , sur l'intervalle $[0; 10]$
9. Soit n un entier, $n \geq 2$

Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que $a_n < 4 < b_n$

10.
 - a. Comparer $f(a_n)$ et $f(a_{n+1})$ pour $n \geq 2$. En déduire que $(a_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.
 - b. Montrer de même que $(b_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

11. Limite de $(b_n)_{n \geq 2}$

On suppose dans un premier temps que b_n admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$

En revenant à la définition de b_n , montrer que nécessairement $f(\ell) = 0$

Conclure sur la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$

12. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

13. Avec Python

- a. Définir la fonction f et la représenter sur l'intervalle $[0; 10]$
- b. Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de calculer une valeur approchée de a_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie :

```
def u(n)
    a=0
    b=1
    while ... :
        m=(a+b)/2
        if ... :
            ...
        else:
            ...
    return ...
```

Problème

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad , \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad , \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad , \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a. Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

- b. Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$

- c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. a. Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

- b. Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$
- b. Montrer que : $\forall n \geq 2, U_n = M^{n-2}U_2$
- c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$
- d. Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$ de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$
4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
- a. Avec Python, définir une fonction **SimulX3** qui permet de simuler la variable aléatoire X_3

- b. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 , exprimer A_k en fonction de E_k et F_k
 - c. En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 , la loi de X_k
- 5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.
 - a. Calculer $P([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2, n = 3$ et $n \geq 4$
 - b. Déterminer $P([S_n = n])$
 - c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 , écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n