Corrigé *2 points*

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - échauffement *2 points*

Soit $u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,2,1)$, et $u_3 = (2,3,2)$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Comme (u_1, u_2, u_3) est une famille à trois éléments et que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

alors $\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(2,3,2) = (0,0,0)$

donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases}$ et en faisant $L_1 - L_3$ on trouve d'emblée $\lambda_1 = 0$

alors L_2 et L_3 donnent $\begin{cases} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_3 &= 0 \quad 2L_3 - L_2 \end{cases}$ donc $\lambda_3 = 0$ et de fait $\lambda_2 = 0$, et finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre

or, comme évoqué plus haut, $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3

donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \ln(1+x)$

Par ailleurs, on pose $a_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < f(x) < x$

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par composition de fonctions $\mathscr{C}^1$ (ln et polynôme).

pour $\forall x > 0, x + 1 > 1$ donc $\ln(1+x) > 0$ par croissance stricte du logarithme

<u>Option A</u> pour $f(x) < x$: posons $g(x) = x - f(x)$ pour $x \geqslant 0$

pour $x > 0, g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

on a nécessairement : $\forall x > 0, g(x) > g(0)$, et comme $g(0) = 0$, $\boxed{\forall x > 0, x > \ln(1+x)}$

<u>Option B</u> (mais inachevée à cause de l'inégalité stricte) : ln est une fonction concave, elle est donc « en-dessous de chacune de ces tangentes » en particulier celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation :

$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = \dfrac{1}{1}(x-1) + 0 = x - 1$

i.e. $\forall x > 0, \ln(x) \leqslant 1 + x$ et donc en posant $u = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + u, \forall u > -1, \ln(1+u) \leqslant u$

reste le problème de l'inégalité stricte et on pourrait évoquer le fait qu'il n'y a égalité que pour $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$ (au point de tangence), mais nous ne disposons pas d'une telle propriété.

2. **a.** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante et strictement positive.

Nous ne pouvons pas nous dispenser de récurrence (immédiate ici) pour la bonne définition et de fait nous sommes obligés d'inclure la positivité pour l'hérédité,

pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « a_n est bien défini et $a_n > 0$ »

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie car a_0 est bien défini et $a_0 > 0$ par définition ($a_0 = 1$)

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse $a_n > 0$ donc $a_{n+1} = f(a_n)$ est bien défini et d'après la question précédente $f(a_n) > 0$
i.e. $a_{n+1} > 0$ donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

on aurait pu inclure la décroissance dans la récurrence, on le fait en dehors ici :
d'après la question précédente, $\forall x > 0, f(x) < x$ et d'après ce que nous venons de montrer $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$
donc $\forall n \in N, f(a_n) < a_n$ i.e. $a_{n+1} < a_n$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (et strictement positive).

b. Quelle est la limite ℓ de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

D'après les résultats précédents, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers un réel ℓ et de plus $\ell \geqslant 0$ par passage à la limite dans l'inégalité $a_n \geqslant 0$
donc, f étant $\mathscr{C}^1$ donc a fortiori continue, d'après le théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$ enfin, en reprenant les notations de la question précédente, on obtient $g(\ell) = \ell - \ln(1+\ell) = 0$ ce qui n'est possible que pour $\ell = 0$: d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$

3. **a.** Déterminer un équivalent de $x - \ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0

D'après les développements limités usuels, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

donc $x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ (par définition $o\left(x^2\right) = -o\left(x^2\right)$), donc $\boxed{x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}}$

b. Déterminer un équivalent de $x\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0

De même, on déduit, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc par produit d'équivalents $\boxed{x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2}$

c. En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$

$\forall x > 0, \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ donc d'après les deux résultats précédents, par quotient d'équivalents : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}}$
car si une des deux fonctions équivalents admet une limite finie au point considéré, l'autre admet la même limite (et l'équivalent, i.e. la limite, étant valable en 0, cela l'est a fortiori en 0^+

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$

a. Quelle est la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$?

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ donc $b_n = \dfrac{1}{\ln(1+a_n)} - \dfrac{1}{a_n}$
or d'après **3.c.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ et d'après **2.b.** $a_n \to 0^+$ (on peut dire 0^+ car $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$)
donc par composition $\dfrac{1}{\ln(1+a_n)} - \dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{b_n \to 0}$

b. On admet le résultat suivant : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ell$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 2$

Par télescopage $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a_n} - 1$ dont on déduit : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) = \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n}$

alors, d'après le résultat admis dans l'énoncé (car $b_n \to \ell = \dfrac{1}{2}$),

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} b_k \to \frac{1}{2}$

donc d'après l'égalité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ et donc par addition de limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + 0$

i.e. $\dfrac{1}{na_n} \to \dfrac{1}{2}$ donc par inverse de limite (non nulle) : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 2}$

c. En déduire un équivalent simple de a_n quand n tend vers $+\infty$ et déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$

Par définition des équivalents, on en déduit $\displaystyle na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$

donc par quotient d'équivalents $\displaystyle\frac{na_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ i.e. $\boxed{\displaystyle a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$

or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est une série à termes positifs de même que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ et d'après les résultats sur les séries de Riemann ($\alpha = 1 \leqslant 1$) la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge donc par opération $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n}$ diverge

donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ diverge}}$ (vers $+\infty$)

Exercice 3

On rappelle que $e \approx 2,7$ et $e^2 \approx 7,4$ à 10^{-1} près.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, <u>de même pour f</u> par produit et composition de fonctions continues (respectivement $\mathscr{C}^1$).

2. Montrer que f est dérivable en 0

Par définition de f, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = e^{-\sqrt{x}}$

or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ donc par continuité de $x \mapsto e^x$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-\sqrt{x}} = e^0 = 1$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$ (et $f'(0) = 1$).

3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

Il ne s'agit par rigoureusement d'un résultat de croissances comparées, mais on s'y ramène par composition (avec $u = \sqrt{x}$) : $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^2 e^{-u} = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\right)^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}} = 0$ soit $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

4. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire les variations de f

$\forall x > 0, f(x) = xe^{u(x)}$ donc $f'(x) = e^{u(x)} + xu'(x)e^{u(x)} = \left(1 - \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right) e^{-\sqrt{x}} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}}$

car $u(x) = -\sqrt{x}$ et donc $u'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

on en déduit (car $e^{-\sqrt{x}} > 0$) : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$ (par croissance des fonctions carré et racine sur $\mathbb{R}_+$), d'où le tableau ($f(4) = 4e^{-\sqrt{4}} = 4e^{-2}$) :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x))$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

5. Justifier que f admet un maximum m vérifiant $\dfrac{1}{2} < m < 1$

D'après l'étude des variations résumée dans le tableau ci-dessus, f étant croissante sur $[0;4]$ et décroissante sur $[4,+\infty[$, f admet un maximum en 4 qui vaut $m = 4e^{-2}$ et comme, d'après l'énoncé, $4 < e^2 < 8$, on a (fonction inverse strictement décroissante sur $]0,+\infty[$), $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{e^2} > \dfrac{1}{8}$ et donc $1 > \dfrac{4}{e^2} > \dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{\dfrac{1}{2} < m < 1}$

6. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

Nous avons déjà montré que f est dérivable en 0 et $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, reste donc à montrer que f' est continue en 0, or d'après **4.**, $\forall x > 0, f'(x) = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}}$

donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \left(1 - \dfrac{0}{2}\right) e^0 = 1 = f'(0)$ d'après la valeur trouvée en **2.**

donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$ (car $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable en 0 et f' continue en 0)

7. Etudier la convexité et les éventuels points d'inflexion de f

En posant pour $x > 0, v(x) = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$ alors $\forall x > 0, f'(x) = v(x)e^{u(x)}$ avec les notations précédentes

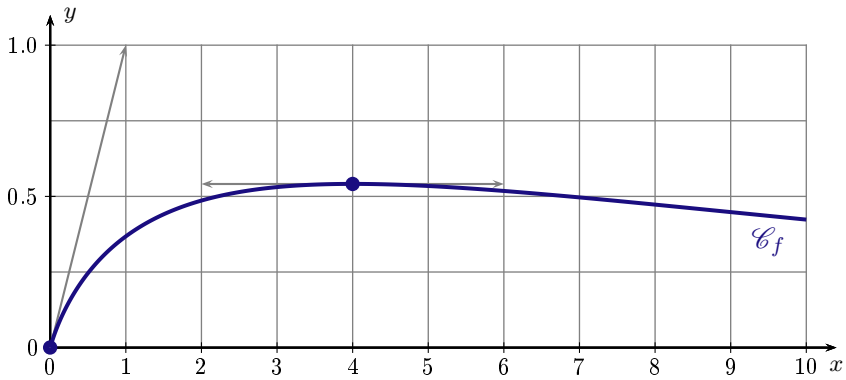
donc $\forall x > 0, f''(x) = v'(x)e^{u(x)} + v(x)u'(x)e^{u(x)} = \left[-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] e^{u(x)}$

$$= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right) e^{u(x)} = \left(-\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\right) e^{u(x)} = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \frac{e^{u(x)}}{4}$$

donc $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$ (car $\sqrt{x} > 0$) $\sqrt{x} \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant 9$ (par croissance des fonctions carré et racine sur $\mathbb{R}_+$) de même $f''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 9$ donc f est <u>concave sur</u> $]0;9]$ (même $[0;9]$ en fait), <u>convexe sur</u> $[9,+\infty[$ et <u>admet un point d'inflexion en</u> $x = 9$ où f'' s'annule en changeant de signe.

8. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, sur l'intervalle $[0;10]$

On utilise les informations disponibles : $f(0)$, le maximum pour $x = 4$ (proche de $\dfrac{1}{2}$), $f'(0) = 1$ qui donne le coefficient directeur de la tangente en 0, les variations de f, la limite en $+\infty$ et l'étude de convexité même si pour la partie $x \geqslant 5$ la courbe est quasiment confondue avec une droite.



9. Soit n un entier, $n \geqslant 2$

Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que $a_n < 4 < b_n$

Sur $[0;4]$: f est strictement croissante et continue donc, d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $[0;4]$ sur $f\langle[0;4]\rangle = [0,m]$

de plus, pour $n \geqslant 2, \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [0, m[$ (car $m > \dfrac{1}{2}$), donc $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f sur $[0; 4[$ i.e. l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution a_n sur $[0, 4]$ et même $[0, 4[$ car $f(4) = m \neq \dfrac{1}{n}$
Sur $[4, +\infty[$: f est strictement décroissante et continue donc induit une bijection de $[4, +\infty[$ sur $f\langle[4, +\infty[\rangle =]0, m]$ et de même pour $n \geqslant 2, \dfrac{1}{n} \in]0, m]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution b_n sur $[4, +\infty[$ et même $]4, +\infty[$, finalement $\boxed{a_n \text{ et } b_n \text{ sont les deux solutions de } f(x) = \dfrac{1}{n} \text{ et } a_n < 4 < b_n}$

10. **a.** Comparer $f(a_n)$ et $f(a_{n+1})$ pour $n \geqslant 2$. En déduire que $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

Pour $n \geqslant 2$, par définition, $f(a_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(a_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$, donc $f(a_n) > f(a_{n+1})$
en notant g la fonction définie sur $[0; 4]$ par $g(x) = f(x)$, on a alors $g(a_n) > g(a_{n+1})$ et comme vu plus haut, g est bijective et croissante, donc g^{-1}, sa réciproque est également croissante
donc $g^{-1}(g(a_n)) > g^{-1}(g(a_{n+1}))$ i.e. $a_n > an + 1$ car $\forall x, g^{-1}(g(x))$
i.e. $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement décroissante.}}$

b. Montrer de même que $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

de même, par définition de $(b_n)_{n\geqslant 2}$, $f(b_{n+1}) < f(b_n)$ et en utilisant $h(x) = f(x)$ sur $[4, +\infty[$, bijection strictement décroissante, de même que sa réciproque, on trouve $b_{n+1} > b_n$,
i.e. $\boxed{(b_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement croissante.}}$

11. Limite de $(b_n)_{n\geqslant 2}$
On suppose dans un premier temps que b_n admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$
En revenant à la définition de b_n, montrer que nécessairement $f(\ell) = 0$
Conclure sur la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$

Supposons $b_n \to \ell$, alors puisque $\forall n \geqslant b_n > 4$, par passage à la limite dans l'inégalité $\ell \in [4, +\infty[$
de plus $f(b_n) \to f(\ell)$ par continuité de f
par ailleurs, comme $f(b_n) = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$, par unicité de la limite, on aurait $f(\ell) = 0$ ce qui n'est pas possible car $f(x) > 0$ pour $x > 0$
donc notre hypothèse de départ est fausse, i.e. $(b_n)_{n\geqslant 2}$ ne converge pas, donc elle ne peut pas être majorée sinon, étant croissante, elle convergerait d'après le théorème de la limite monotone
finalement $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et non majorée donc d'après le théorème de la limite monotone,

$\boxed{(b_n)_{n\geqslant 2} \text{ diverge vers } +\infty}$

12. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

$(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée (par 0) donc d'après le théorème de la limite monotone, $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite ℓ' et $(a_n)_{n\geqslant 2}$ étant une suite positive, $\ell' \geqslant 0$
puis de la même manière que le raisonnemnet pour $(b_n)_{n\geqslant 2}$ (mais pas par l'absurde cette fois) $f(a_n) = \dfrac{1}{n}$ et d'une part $f(a_n) \to f(\ell')$ par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, d'autre part $\dfrac{1}{n} \to 0$, donc par unicité de la limite, on obtient $f(\ell') = 0$ ce qui imlique $\ell' = 0$ comme vu plus haut, et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$

13. Avec Python

a. Définir la fonction f et la représenter sur l'intervalle $[0; 10]$

```
def f(x):
  return x*np.exp(-np.sqrt(x))
```

b. Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de calculer une valeur approchée de a_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie :

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, le programme cherche à résoudre $f(x) = \dfrac{1}{n}$ sur l'intervalle $[0;4]$ (le programme comporte donc une erreur, il est plus logique de commencer avec $b = 4$) et comme la fonction est croissante sur cet intervalle, quand $f(m)$ sera inférieur à la valeur ciblée, il faudra « resserer l'intervalle à gauche ».

```
def u(n)
  a=0
  b=4
  while (b-a)>10**(-3) :
    m=(a+b)/2
    if f(a)<1/n :
      a=m
    else:
      b=m
  return m
```

Problème

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad , \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad , \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad , \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. **a.** Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on a :

$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

b. Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1}), P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. **a.** Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

b. Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$

b. Montrer que : $\forall n \geqslant 2, U_n = M^{n-2}U_2$

c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$

d. Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$ de $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a. Avec Python, définir une fonction `SimulX3` qui permet de simuler la variable aléatoire X_3

b. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 , exprimer A_k en fonction de E_k et F_k

c. En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 , la loi de X_k

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a. Calculer $P([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2, n = 3$ et $n \geqslant 4$

b. Déterminer $P([S_n = n])$

c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 , écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n