

Corrigés, a minima des exercices non abordés en classe.

Dimensions et sous-espaces vectoriels.

Exercice 8

2. On considère $E = \mathbb{R}^3$

Dans chacun des cas suivants, dire si (u, v, w) est une famille libre ou liée.

d. $u = (1, 0, -1)$, $v = (2, -2, 1)$, $w = (a, b, c)$ où a, b, c sont des réels.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$

alors $\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, -2, 1) + \gamma(a, b, c) = (0, 0, 0)$

i.e. $(\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, -2\beta, \beta) + (a\gamma, b\gamma, c\gamma) = (0, 0, 0)$

$$\text{soit } (\alpha + 2\beta + a\gamma, -2\beta + b\gamma, -\alpha + \beta + c\gamma) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + a\gamma = 0 \\ -2\beta + b\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + c\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + a\gamma = 0 \\ -2\beta + b\gamma = 0 \\ 3\beta + (a+c)\gamma = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + a\gamma = 0 \\ -2\beta + b\gamma = 0 \\ (a + \frac{3}{2}b + c)\gamma = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow \frac{3}{2}L_2 + L_3$$

1^{er} cas : si $a + \frac{3}{2}b + c = 0$ alors la dernière équation devient $0 = 0$, donc le système admet une infinité de solutions car c'est alors un système linéaire homogène (admettant donc au moins une solution) et non carré (admettant donc aucun ou une infinité de solutions).

On peut aussi remarquer qu'alors (avec $\gamma = 1$, $\left(-b - a, \frac{b}{2}, 1\right)$ est solution

la famille est donc liée dans ce cas.

2^{ème} cas : si $a + \frac{3}{2}b + c \neq 0$ alors la dernière équation entraîne $\gamma = 0$ puis les deux autres donnent $\alpha = \beta = 0$ et la famille est donc libre dans ce cas.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

On pose $P_0(X) = 1 + X$, $P_1(X) = X + X^2$, $P_2(X) = X^2 + X^3$, $P_3(X) = 1 + aX^3$

1. Dans le cas où $a = 1$, montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est liée et déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) , c'est-à-dire la dimension de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$

Si $a = 1$ alors $P_3(x) = 1 + x^3 = 1 + x - (x + x^2) + x^2 + x^3 = P_0(x) - P_1(x) + P_2(x)$

donc la famille est liée, de fait $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ (puisque P_3 se décompose comme combinaison linéaire des autres polynômes).

On va alors montrer que (P_0, P_1, P_2) est une famille libre (N.B. : c'est une famille échelonnée) :

soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) = 0$ i.e. $\lambda_0(1 + x) + \lambda_1(x + x^2) + \lambda_2(x^2 + x^3) = 0$

donc $\lambda_0 + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + \lambda_2 x^3 = 0$

donc par identification : $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 = 0$

et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc la famille (P_0, P_1, P_2) est libre, de plus c'est une famille génératrice de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ par définition du Vect, c'est donc une base de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$

donc $\dim(\text{Vect}(P_0, P_1, P_2)) = 3$ (car il comporte une base à 3 éléments)
donc $\dim(\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)) = 3$ car $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2) = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$
i.e. la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est de rang 3

Nota bene : on peut aussi utiliser des évaluations pour déterminer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, par exemple en $x = 0$ ce qui donne d'emblée $\lambda_0 = 0$

2. Dans le cas $a = -1$, montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Il suffit de montrer que c'est une base puisque c'est une famille à 4 éléments, et que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) = 0$

i.e. $\lambda_0(1+x) + \lambda_1(x+x^2) + \lambda_2(x^2+x^3) + \lambda_3(1-x^3) = 0$

donc $\lambda_0 + \lambda_3 + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)x^3 = 0$

donc par identification : $\lambda_0 + \lambda_3 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ soit

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

donc $\lambda_3 = 0$ puis par substitution $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_0 = 0$

donc la famille est libre, de plus $\text{Card}((P_0, P_1, P_2, P_3)) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[x])$

donc (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$

Des exercices classiques

Exercice 12

Pour a, b, c réels, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ lorsque

a, b, c décrivent $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\mathcal{A} = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$ et une base de $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \text{Par définition } \mathcal{A} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ par définition de Vect} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel (puisque'il s'écrit comme Vect d'une famille de vecteurs)

de plus par définition $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ en est une famille génératrice

montrons que cette famille est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}_3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \text{ alors } \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille est libre

comme elle est de plus génératrice, c'est une base de $\mathcal{A}$, de fait $\dim(\mathcal{A}) = 3$ car une de ses bases comporte 3 éléments.

Pour aller un peu plus loin

Exercice 15 - ce type d'espace vectoriel n'est pas au programme

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' = y$ sur $\mathbb{R}$ (on admet que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel).

1. Résoudre E et en déduire une base de $\mathcal{E}$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est $x^2 - 1 = 0$ donc les racines évidentes sont -1 et 1

donc par propriété, $\mathcal{E} = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

finalement $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, autrement dit $\mathcal{E} = \text{Vect}(f_1, f_2)$

donc (f_1, f_2) est une famille génératrice de $\mathcal{E}$, reste à montrer que c'est une famille libre :

soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = 0$

en particulier pour $x = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ e\lambda + e^{-1}\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (e^{-1} - e)\mu = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \mu = 0 \text{ (car } e^{-1} - e \neq 0) \\ \text{puis } \lambda = 0$$

donc la famille (f_1, f_2) est libre, donc, étant génératrice, c'est une base de $\mathcal{E}$

Nota bene : on peut également utiliser les limites en $-\infty$ et $+\infty$ pour trouver $\lambda = \mu = 0$

2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Montrer que (ch, sh) forme une base de $\mathcal{E}$

On peut remarquer que ces deux fonctions sont dans $\mathcal{E}$ (et donc solutions de E) car elle sont combinaisons linéaires de f_1 et f_2 : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}f_2(x)$ et $\text{sh}(x) = \frac{1}{2}f_1(x) - \frac{1}{2}f_2(x)$

puis

Option 1 : on peut remarquer que f_1 et f_2 sont combinaisons linéaires de ces deux fonctions, puisque de manière évidente, $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = f_1(x)$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = f_2(x)$

donc $\text{Vect}(f_1, f_2) = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ car toute combinaison linéaire de f_1 et f_2 est alors combinaison linéaire de ch et sh d'après ce que nous venons de montrer et réciproquement comme remarqué en introduction de la question

finalement $\mathcal{E} = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ donc la famille $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ est une famille génératrice à deux éléments de $\mathcal{E}$ qui est un espace vectoriel de dimension 2 d'après la question 1., c'est donc une base de $\mathcal{E}$

Option 2 : on peut montrer que ces deux fonctions forment une famille libre comme plus haut en prenant une combinaison linéaire nulle et en évaluant en 0, on obtient directement la nullité du coefficient affecté à ch puisque $\text{sh}(0) = 0$

Exercice 16 - des espaces vectoriels ?

Tous les espaces vectoriels (ou pas) ci-dessous ne sont pas forcément au programme, mais cela permet de tester votre connaissance du concept (d'espace vectoriel)

Les ensembles suivant sont-ils des (sous)-espaces vectoriels ?

Dans les cas où il s'agit bien d'un espace vectoriel ci-dessous, la démonstration n'est pas faite intégralement, mais on peut mettre en place la méthode classique pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (trouver l'espace plus grand, montrer que l'élément nul est contenu dans l'ensemble et que l'ensemble est stable par combinaisons linéaires de types $\lambda u + v$).

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la continuité des fonctions est stable par combinaison linéaire d'après les propriétés sur les opérations de fonctions continues (addition et multiplication par un nombre réel notamment).

2. L'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivabilité des fonctions est stable par combinaison linéaire d'après les propriétés sur les opérations de fonctions continues (addition et multiplication par un nombre réel notamment).

3. L'ensemble des fonctions réelles T -périodiques sur $\mathbb{R}$ ($T > 0$ fixé).

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une fonction T -périodique est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$

la fonction nulle l'est donc et pour deux fonctions T -périodique, $(\lambda f + g)(x + T) = \lambda f(x + T) + g(x + T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$

4. L'ensemble des fonctions réelles convexes sur $\mathbb{R}$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la nouvelle fonction est concave.

5. L'ensemble des fonctions réelles croissantes sur $\mathbb{R}$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la nouvelle fonction est décroissante.

6. L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la nouvelle fonction est négative.

7. L'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car la combinaison linéaire de deux suites nulles à partir d'un certain rang le sera également à partir du rang maximal des deux.

8. L'ensemble des suites réelles de limite nulle.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car par propriétés (opérations sur les limites), la convergence vers 0 est stable par combinaisons linéaires.

9. L'ensemble des fonctions réelles définie sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +/\infty$

10. L'ensemble des suites réelles de limite $+\infty$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la limite est $-\infty$ (ou encore la suite nulle n'est pas dans l'ensemble).

11. L'ensemble des suites réelles convergentes.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car par propriétés (opérations sur les limites), la convergence est stable par combinaisons linéaires.

12. L'ensemble des suites réelles divergentes

Non, en prenant $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente bien que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient divergentes (ou encore la suite nulle n'est pas dans l'ensemble).

13. L'ensemble des suites u telles que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car la négligeabilité (devant $\frac{1}{n}$) est stable par combinaisons linéaires.

14. L'ensemble des fonctions réelles de limite 1 en $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +/\infty$

Non car si $\lim_a f = 1$ alors $\lim_a 2f = 2$ (ou encore la fonction nulle n'est pas dans l'ensemble).

15. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'(x) + ay(x) = 0$ sur un intervalle I , où $a \in \mathbb{R}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la fonction nulle est solution et si y_1 et y_2 sont deux solutions alors $(\lambda y_1 + y_2)' + a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1' + ay_1) + y_2' + ay_2 = 0$ donc $\lambda y_1 + y_2$ est solution.

16. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) + ay(x) = b$ sur un intervalle I , où a et b sont des réels. Non (en supposant b non nul), avec les notations précédentes, $y_1 + y_2$ serait solution de l'équation ayant $2b$ comme second membre (ou la fonction nulle n'est pas solution).

17. $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés, l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car la suite nulle vérifie la relation et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation alors $(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) = a(\lambda u + v)_{n+1} + b(\lambda u + v)_n$

18. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, nulles en dehors d'un segment fermé.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction nulle vérifie naturellement la condition et en prenant deux fonctions nulles en dehors d'un segment fermé, en notant $[a, b]$ et $[a', b']$ ces deux segments, alors toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est nulle en dehors du segment $[\min(a, a'), \max(b, b')]$