Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :
- définir les termes valeur propre et vecteur propre ☐
- déterminer si un réel est valeur propre ou non d'une matrice ☐
- déterminer des sous-espaces propres ☐
- utiliser des familles de vecteurs propres ☐
- montrer qu'une matrice est diagonalisable et diagonaliser une matrice ☐
- interpréter les racines d'un polynôme annulateur d'une matrice ☐

La réduction (= diagonalisation pour nous) d'une matrice A consistera à trouver une matrice D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espace propre

Définitions et propriétés	**Exemples**
Définitions : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0_{n,1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{MX = \lambda X}$ alors X est appelé **vecteur propre** de la matrice M et λ est appelé **valeur propre** de la matrice M L'ensemble des valeurs propres de M est noté $\mathrm{Sp}(M)$, appelé **spectre** de M	Exemple : avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors $MX = 3X$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M est 3 est valeur propre
Propriété : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Corollaire : 0 est valeur propre de $M \Leftrightarrow M$ n'est pas inversible.	Exemple : avec M ci-dessus $M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible

Remarque (et rappel) : une matrice carrée M **n'est pas** inversible lorsque le système homogène associé admet des solutions non nulles (système non de Cramer). En particulier, toute matrice ayant une ligne (ou une colonne) qui est combinaison linéaire des autres n'est pas inversible.

▷ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si, et seulement si le système $MX = \lambda X$ n'est pas de Cramer.

Sans autre information, trouver des valeurs propres et des vecteurs propres consiste donc à résoudre (en partie) un système à paramètre (λ).

Définition : avec les notations précédentes, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble $\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), MX = \lambda X\}$ est appelé **sous-espace propre** de M associé à la valeur propre λ, et noté $E_\lambda(M)$ Propriété : $E_\lambda(M)$ est un espace vectoriel c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $(M - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$ (d'inconnue X)	Exemple : toujours avec M plus haut $MX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$ $E_3(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Matrices diagonales et triangulaires

Propriété : les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont les éléments sur sa diagonale.	« Démonstration » : si a est un coefficient diagonal, alors $M - aI_n$ est triangulaire avec un coefficient diagonal nul, elle n'est donc pas inversible, i.e. a est valeur propre.

Polynômes annulateurs

Définition : un **polynôme** $P = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ est dit **annulateur** d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si : $$P(M) = \sum_{k=0}^{N} a_k M^k = 0_n$$	Exemple : avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = I_2$ i.e. $A^2 - I_2 = 0_2$ donc $x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A
Propriété : si P est un polynôme annulateur de M, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Longrightarrow P(\lambda) = 0$ i.e. $\mathrm{Sp}(M) \subset \{$ racines de $P\}$	Exemple : avec la matrice A ci-dessus, les seules valeurs propres possibles sont -1 et 1 (mais reste à le vérifier).

Donc : $\boxed{\text{les valeurs propres de } M \text{ sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.}}$

⚠ la réciproque est fausse

En effet, avec l'exemple où $x^2 - 1$ est annulateur de A, alors $(x-7)(x^2-1)$ est aussi annulateur de A puisque $(A - 7I_2)(A^2 - I_2) = (A - 7I_2) \times 0_2 = 0_2$

Propriétés sur les familles de vecteurs propres, sous-espaces propres

Propriété : p vecteurs propres associés à p valeurs propres deux-à-deux distinctes forment une famille libre. Corollaire : une matrice d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes.	Exemple : avec la matrice M plus haut, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment donc une famille libre, car ce sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et 3
Propriété : une concaténation de familles libres de sous-espaces propres différents forme une famille libre (de vecteurs colonnes).	Exemple : avec A_1 de l'**exercice 1**, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre
Propriété : la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à l'ordre de la matrice	Les vecteurs propres sont des éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une famille libre de cet espace vectoriel (de dimension n) a au plus n éléments.

Remarque : dans la pratique, on cherchera souvent à connaitre cette somme des dimensions des sous-espaces propres. Si elle vaut n (cf. plus bas), la matrice sera diagonalisable.

Matrices diagonalisables

Définition : deux matrices carrées A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$	
Définition : une matrice carrée M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale autrement dit, M diagonalisable si $$M = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}MP = D \Leftrightarrow MP = PD$$	Exemple : avec M vue plus haut, M est diagonalisable car $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : comme on le voit sur l'exemple, $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes de la matrice P forment une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M

Dans la pratique, comment fait-on pour diagonaliser une matrice ?

L'exemple ci-dessus (facile) nous donne globalement la méthode.

1. On trouve les valeurs propres.
2. On trouve une base de vecteurs propres, plus précisément une concaténation de bases des sous-espaces propres.
   - ▷ cela donne la matrice P dont chacune des colonnes est un vecteur propre de cette base ;
   - ▷ puis on écrit la matrice D qui contient en diagonale les valeurs propres associées à chaque vecteur propre (et rangées dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice P).
3. on conclut, en faisant les calculs matriciels : MP d'un coté, PD de l'autre ; et l'égalité nous permet d'affirmer que M est diagonalisable.

Remarque : à l'étape 2 si « le compte est bon », i.e. la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à l'ordre de la matrice, nous savons que cela va fonctionner.

Le résultat sous-jacent (hors programme) est que : « $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M ».

Corollaire (de ce résultat hors-programme et donc hors-programme aussi) : si la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à l'ordre de la matrice (la somme est alors inférieure), alors la matrice n'est pas diagonalisable. Nous ne savons donc pas vraiment montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable, sauf dans un cas particulier que nous verrons en exercice.

Matrices symétriques

Propriété : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable	Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car symétrique

Cas particulier des matrices carrées de taille 2

Dans ce cas, le déterminant nous permet de trouver plus rapidement les valeurs propres :

Propriété : avec $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $$\boxed{\lambda \text{ valeur propre} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0}$$	Exemple : les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ sont 2 et 4 car $\det(M - \lambda I_2) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$

Méthode : comment procéder dans les cas suivants ?

- Montrer qu'un vecteur X (non nul) est vecteur propre de A :
  - ▷ on calcule AX et on doit trouver un résultat de type λX qui montre que λ est valeur propre et X est vecteur propre
- Montrer qu'un réel λ donné est valeur propre de A :
  - ▷ si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres sont les racines de $\det(A - \lambda I_2)$ (qui est un polynôme de degré 2, l'inconnue est λ)
  - ▷ on montre que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, en faisant des opérations élémentaires, et on poursuit généralement la résolution du système pour déterminer les vecteurs propres associés.
- Déterminer une ou les valeur(s) propre(s) de A :
  - ▷ si on dispose d'un polynôme annulateur de A, les valeurs propres sont à chercher parmi les racines du polynôme.
  - ▷ dans les cas évidents de matrices diagonales ou triangulaires, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux
  - ▷ sinon (hors programme normalement), on montre que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, il s'agit d'un système à paramètre.

Un cas classique d'application de la réduction à l'étude de suites récurrentes

Ce type d'exercice a déjà été abordé en première année. La nouveauté est de pouvoir parler de valeurs propres, vecteurs propres et parfois de pouvoir diagonaliser « la » matrice (dans le cas ci-dessous, la matrice C n'est pas diagonalisable).

Exercice 8 - tous concours

On considère la matrice C définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que : $(C - I_3)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. En déduire que C admet une et une seule valeur propre λ que l'on déterminera, et que son sous-espace propre associé est de dimension 1

2. C est-elle diagonalisable ?

3. Soit $N = C - I_3$. Justifier que $N^n = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout entier $n \geqslant 3$ et en déduire deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C^n = I_3 + a_n N + b_n N^2$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3 + n(2-n)C + \frac{n(n-1)}{2} C^2$$

4. On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : x_0, x_1 et x_2 donnés et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = {}^t(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ (vecteur colonne).

a. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = CX_n$

b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de x_0, x_1 et x_2 et de n