ECG 2 - maths appli. **Devoir en temps libre n°3** Pour le 7 novembre 2025

Corrigé *Total sur 38 points*

Exercice 1 - (Type : Ecricome) *17 points*

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé, on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = P(A/B)$

Dans cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où , au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents (on peut appeler X_N le « nombre de changements » au cours des N premiers lancers).

Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement :

Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile

alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, \cdots, N-1\}$ *1 point*

On peut le justifier sommairement en disant que les cas extrêmes (avec N lancers) :

- on a réalisé Pile à chaque lancer, donc il n'y a eu aucun changement, donc dans ce cas $X_N = 0$
- on a commencé par un Pile, puis chacun des $N-1$ lancers restants est différent du précédent, donc $X_N = N-1$

entre les deux ($k \in [\![0, N-2]\!]$), tous les cas intermédaires sont possibles, on commence par Pile, puis on obtient k changements lors des k lancers suivants, puis plus aucun changement.

On considère que la justification précédente est suffisante, mais pour le démontrer rigoureusement, il faut faire une récurrence,

pour $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, on pose $P(N) : X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$

Initialisation : $P(2)$ est vraie $\Leftrightarrow X_2 = \{0, 1\}$

ce qui est vrai car en deux lancers on ne peut obtenir que aucun ou un seul changement.

Hérédité : pour $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, on suppose que $P(N)$ est vraie

alors par hypothèse $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$ donc en effectuant un lancer de plus, on peut obtenir un changement supplémentaire ou aucun changement donc $X_{N+1}(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$

réciproquement, on montre l'autre inclusion (i.e. que toutes ces valeurs sont possibles pour X_{N+1}), pour $k \in [\![0, N]\!]$, alors

dans le cas où $k = 0, X_{N+1} = 0$ est possible comme vu plus haut (on obtient le même résultat au cours des $N+1$ lancers)

dans le cas où $k > 0$, par hypothèse, $k-1 \in [\![0, N-1]\!]$ donc par hypothèse de récurrence, $k-1 \in X_N(\Omega)$ donc $X_N = k-1$ est possible et donc $X_{N+1} = k$ est possible (on obtient au lancer $N+1$ un résultat différent de celui obtenu au $N^{\text{ème}}$, dans un des cas où $X_N = k-1$)

finalement $[\![0, N]\!] \subset X_{N+1}(\Omega)$, l'autre inclusion est donc démontrée, et donc $X_{N+1}(\Omega) = [\![0, N]\!]$ i.e. $P(N+1)$ est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2, P(N)$ est vraie

2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. *2,5 points*

Déterminer la loi de X_3

D'après la question **1.**, $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et il n'y a que quatre possibilités pour 2 lancers :

$P(X_2 = 0) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (on a obtenu, Pile, Pile ou Face, Face)

$P(X_2 = 1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (on a obtenu, Pile, Face ou Face, Pile)

finalement, $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (ou $X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![0, 1]\!]\right)$)

donc par propriété de la loi de Bernoulli, $E(X_2) = \frac{1}{2}$

d'après la question **1.** $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
et $((X_2 = 0), (X_2 = 1))$ forme un système complet d'événements
donc pour $i \in \{0, 1, 2\}, P(X_3 = i) = P(X_2 = 0)P_{[X_2=0]}P(X_3 = i) + P(X_2 = 1)P_{[X_2=1]}(X_3 = i)$
or $P_{[X_2=0]}P(X_3 = 0) = P_{[X_2=0]}P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$ (ce sont les cas où on a d'abord obtenu 2 lancers identiques, puis il y a une chance sur deux que le troisième soit identique ou différent, sachant le résultat des deux premiers)
de même $P_{[X_2=1]}P(X_3 = 1) = P_{[X_2=1]}P(X_3 = 2) = \frac{1}{2}$
et $P_{[X_2=0]}P(X_3 = 2) = P_{[X_2=1]}P(X_3 = 0) = 0$ (il n'est pas possible d'obtenir 2 changements en trois lancers si on n'en a obtenu que 2 lors des deux premiers lancers, et d'obtenir aucun changement en trois lancers s'il y en a déjà eu un au cours des deux premiers)
donc $P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$ et $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
et $P(X_3 = 2) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (on aurait pu déduire la troisième valeur des deux premières, $= 1 - \dots$)
finalement on remarque que $X_3 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ mais il n'était pas forcément évident de le deviner (on peut comprendre qu'il y a une chance sur deux que deux lancers consécutifs donnent un changement et il y a deux couples de lancers consécutifs).

3. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$ *2 points*

On peut le montrer par récurrence ou écrire ($X_N = 0$ signifie que des Pile ou que des Face) :
$(X_N = 0) = \left(\bigcap_{k=1}^{N} P\right) \bigcup \left(\bigcap_{k=1}^{N} F\right)$

donc par indépendance mutuelle des lancers et comme les deux événement $\bigcap_{k=1}^{N} P$ et $\bigcap_{k=1}^{N} F$ sont incompatibles $P(X_N = 0) = \prod_{k=1}^{N} P(P) + \prod_{k=1}^{N} P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$

Pour le cas $P(X_N = 1)$, comme il n'y a qu'un seul changement, cela correspond à une série de Pile puis une série de Face ou vice versa. La question revient à trouver la position du changement et il y a $N - 1$ possibilités à chaque fois (du lancer 2 au lancer N).
Pour le montrer rigoureusement, on peut faire une récurrence,
pour $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, on pose $P(N) : P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$

<u>Initialisation</u> : $P(2)$ est vraie $\Leftrightarrow P(X_2 = 1) = 2(2-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$
ce qui est vrai d'après **2.** donc $P(2)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : pour $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, on suppose que $P(N)$ est vraie
alors comme $([X_N = k])_{k \in [\![0, N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, $P(X_{N+1} = 1) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k)P_{[X_N=k]}(X_{N+1} = 1)$
or si $k > 1, P_{[X_N=k]}(X_{N+1} = 1) = 0$ (si il y a déjà eu strictement plus d'un changement au cours des N premiers lancers, il n'est pas possible d'en n'obtenir qu'un seul au cours des $N + 1$ premiers lancers)

donc $P(X_{N+1}=1)=P(X_N=0)P_{[X_N=0]}(X_{N+1}=1)+P(X_N=1)P_{[X_N=1]}(X_{N+1}=1)$ or $P(X_N=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ comme vu plus haut et $P_{[X_N=0]}(X_{N+1}=1)=P_{[X_N=1]}(X_{N+1}=1)=\frac{1}{2}$ (une chance sur deux qu'il y ait un changement ou non entre les instants N et $N+1$) ; enfin par hypothèse de récurrence $P(X_N=1)=2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$

donc $P(X_{N+1}=1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}+\frac{1}{2}\times 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N=\left(\frac{1}{2}\right)^N+2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$

donc $P(X_{N+1}=1)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}+2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}=2N\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$

i.e. $P(N+1)$ est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall N\in\mathbb{N}, N\geqslant 2, P(N)$ est vraie

4. **a.** Justifier que pour tout entier k de $\{0,...,N-1\}$: $P_{X_N=k}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}$ *0,5 point*

(C'est à dire $P(X_{N+1}=k/X_N=k)=\frac{1}{2}$)

Comme vu à plusieurs reprises, il y a une chance sur deux qu'un nouveau lancer apporte un changement supplémentaire ou n'apporte aucun changement (c'est ce dernier cas que l'on cherche ici), donc $P_{X_N=k}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}$

b. En déduire que pour tout entier k de $\{0,...,N-1\}$: *1 point*

$$P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=\frac{1}{2}P(X_N=k)$$

Remarquons d'abord que $(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=(X_{N+1}=k)\cap(X_N=k)$ et par définition des probabilités conditionnelles,

$P((X_{N+1}=k)\cap(X_N=k))=P(X_N=k)P_{[X_N=k]}(X_{N+1}=k)=P(X_N=k)\times\frac{1}{2}$ d'après **4.a.** donc $P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=P(X_N=k)\times\frac{1}{2}$

c. En sommant cette relation de $k=0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1}-X_N=0)=\frac{1}{2}$

Comme vu plus haut, $([X_N=k])_{k\in[\![0,N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements *2 pts*
donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(X_{N+1}-X_N=0)=\sum_{k=0}^{N-1}P(X_N=k)P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)$

$P(X_{N+1}-X_N=0)=\sum_{k=0}^{N-1}P(X_N=k)\times\frac{1}{2}$ d'après la question précédente

$P(X_{N+1}-X_N=0)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}P(X_N=k)=\frac{1}{2}$ car $\sum_{k=0}^{N-1}P(X_N=k)=1$ puisque $([X_N=k])_{k\in[\![0,N-1]\!]}$ est un système complet d'événements

d. Montrer que la variable $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ *2 points*

En déduire la relation $E(X_{N+1})=\frac{1}{2}+E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N

Les seules valeurs possibles pour $X_{N+1}-X_N$ sont 0 ou 1 (aucun ou un changement supplémentaire)

de plus comme nous venons de le voir, $P(X_{N+1}-X_N)=\frac{1}{2}$ donc $X_{N+1}-X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

donc comme plus haut $E(X_{N+1}-X_N)=\dfrac{1}{2}$,

donc par linéarité $E(X_{N+1})-E(X_N)=\dfrac{1}{2}$ et donc $E(X_{N+1})=\dfrac{1}{2}+E(X_N)$

donc $(E(X_N))_{N\geqslant 2}$ est une suite arithmétique (on peut poser $u_N=E(X_N)$ pour s'en convaincre)

donc $\forall N\geqslant 2, E(X_N)=(N-2)\times\dfrac{1}{2}+E(X_2)=(N-2)\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=(N-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{N-1}{2}$

5. **a.** Montrer grâce aux résultats **4.b.** et **4.c.** que les variables $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes.

Soit $k\in[\![2,N-1]\!]$, alors d'après la question **4.b.**, *2 points*

$P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=\dfrac{1}{2}P(X_N=k)$

et comme $(X_{N+1}-X_N)(\Omega)=\{0,1\}$ d'après la (petite) formule des probabilités totales $P(X_N=k)=P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)+P(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k)$

on en déduit $P(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k)=P(X_N=k)-\dfrac{1}{2}P(X_N=k)=\dfrac{1}{2}P(X_N=k)$

finalement : d'après la question **4.d** $P(X_{N+1}-X_N=0)=P(X_{N+1}-X_N=1)=\dfrac{1}{2}$ et

$P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=\dfrac{1}{2}P(X_N=k)$ et

$P(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k)=\dfrac{1}{2}P(X_N=k)$

i.e. $P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=P(X_{N+1}-X_N=0)P(X_N=k)$

et $P(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k)=P(X_{N+1}-X_N=1)P(X_N=k)$

ce qui constitue tous les couples de valeurs possibles pour $X_{N+1}-X_N$ et X_N

donc par définition $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes.

b. En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $B\left(N-1,\dfrac{1}{2}\right)$ *4 points*

En déduire la variance $V(X_N)$

On s'exécute, pour $N\in\mathbb{N}, N\geqslant 2$, on pose $P(N): X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N-1,\dfrac{1}{2}\right)$

Initialisation : $P(2)$ est vraie $\Leftrightarrow X_2\hookrightarrow\mathscr{B}\left(1,\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow X_2\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

ce qui est vrai d'après la question **2.** donc $P(2)$ est vraie

Hérédité : pour $N\in\mathbb{N}, N\geqslant 2$, on suppose que $P(N)$ est vraie

alors d'après **1.** $X_{N+1}(\Omega)=[\![0,N]\!]$ et par hypothèse $X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N-1,\dfrac{1}{2}\right)$

donc $\forall k\in[\![0,N-1]\!], P(X_N=k)=\dbinom{N-1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$

Nota bene : ceci correspond à la loi binomiale car $p=q=\dfrac{1}{2}$ ici et donc $p^kq^{N-1-k}=p^{N-1}$

soit $k\in[\![0,N]\!]$, alors d'après la formule des probabilités totales (toujours le système complet d'événements $([X_N=i])_{i\in[\![0,N-1]\!]}$)

$P(X_{N+1}=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}P(X_N=i)P_{[X_N=i]}(X_{N+1}=k)$

1er cas : $k=0$ alors $P(X_{N+1}=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^N$ d'après **3.**

2ème cas : $k>0$

alors puisque $\forall i\neq k-1$ et $i\neq k, P_{[X_N=i]}(X_{N+1}=k)=0$ (il ne peut y avoir que i ou $i+1$ changements en $N+1$ lancers s'il y en a eu i en N lancers, donc

$P(X_{N+1}=k)=P(X_N=k-1)P_{[X_N=k-1]}(X_{N+1}=k)+P(X_N=k)P_{[X_N=k]}(X_{N+1}=k)$
$=\binom{N-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\times\frac{1}{2}+\binom{N-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\times\frac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence et car $P_{X_N=k-1}(X_{N+1}=k)=P_{X_N=k}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}$ (une chance sur deux dans chacun de ces deux cas)

donc $P(X_{N+1}=k)=\left(\binom{N-1}{k-1}+\binom{N-1}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}=\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$ d'après la formule du binôme de Pascal

finalement $X_{N+1}(\Omega)=[\![0,N]\!]$ et $\forall k\in[\![0,N]\!], P(X_{N+1}=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$

donc $X_{N-1}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)$ i.e. $P(N+1)$ est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall N\in\mathbb{N}, N\geqslant 2, P(N)$ est vraie i.e. $X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N-1,\frac{1}{2}\right)$

et donc par propriété $V(X_N)=(N-1)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{N-1}{4}$

Nota bene : on retrouve également le résultat de la question **4.d.** pour l'espérance.

<u>Remarque</u> : l'idée de l'énoncé est sans doute plutôt d'utiliser dans l'hérédité,
$(X_{N+1}=k)=([X_N=k]\cap[X_{N+1}-X_N=0])\bigcup([X_N=k-1]\cap[X_{N+1}-X_N=1])$
puis par indépendance et incompatibilité, $P(X_{N+1}=k)=P(X_N=k)P(X_{N+1}-X_N=0)+P(X_N=k-1)P(X_{N+1}-X_N=1)$
donc $P(X_{N+1}=k)=P(X_N=k)\frac{1}{2}+P(X_N=k-1)\frac{1}{2}$ puis avec l'hypothèse de récurrence, on retrouve la formule de Pascal

<u>Rectificatif</u> : en fait voici ce qui était attendu pour l'hérédité (beaucoup plus simple)

<u>Hérédité</u> : pour $N\in\mathbb{N}, N\geqslant 2$, on suppose que $P(N)$ est vraie

alors par hypothèse, $X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N-1,\frac{1}{2}\right)$

or d'après **4.d.**, $X_{N+1}-X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathscr{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)$

de plus, d'après **5.a.**, X_N et $X_{N+1}-X_N$ sont indépendantes
donc par stabilité des lois binomiales pour l'addition (N.B. : le paramètre p est le même pour les deux variables) : $X_N+X_{N+1}-X_N\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N-1+1,\frac{1}{2}\right)$ i.e. $X_{N+1}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)$
d'où l'hérédité.

Exercice 2 *21 points*

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable. *0,25 points*

A est symétrique donc diagonalisable.

2. Calculer $4A^3 - 3A$. En déduire un polynôme P annulateur de A *2,25 points*

$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $A^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

donc $4A^3 - 3A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$

donc $4A^3 - 3A - I_3 = 0$ donc $4x^3 - 3x - 1$ est un polynôme annulateur de A

3. Calculer $P(1)$. En déduire une racine de P puis, les autres racines de P *2 points*

$P(1) = 4 - 3 - 1 = 0$ donc 1 est une racine de P et donc P peut s'écrire $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2
donc $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, P(x) = ax^2 + bx + c$
alors $(x-1)Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
donc par identification $a = 4, -c = -1$ et $b - a = 0$ donc $b = a = 4$ et $c = 1$
donc $Q(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$
donc $P(x) = (x-1)(2x+1)^2$ et donc les racines de P sont $-\frac{1}{2}$ et 1

4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = PDP^{-1}$
Calculer P^{-1} *7 points*

Il faut donc diagonaliser A. D'après la question précédente, on sait que $\mathrm{Sp}\{A\} \subset \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, on va donc tester ces deux valeurs propres potentielles et déterminer le cas échéant les sous-espaces propres associés

$AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow (2A - 2I_3)X = 0_{3,1}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 1/3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

donc 1 est valeur propre (il existe des solutions non nulles à $AX = X$)

et $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

de même $AX = -\dfrac{1}{2}X \Leftrightarrow \left(A + \dfrac{1}{2}I_3\right) X = 0_{3,1} \Leftrightarrow (2A + I_3)X = 0_{3,1}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \left\{ x + y + z = 0 \right. \Leftrightarrow \left\{ x = -y - z \right.$ donc, de même, $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre

et $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$E_{-\frac{1}{2}}(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

car le Vect reste identique en changeant des vecteurs générateurs par des vecteurs proportionnels non nuls. On fait ceci pour se conformer à la demande de l'énoncé sur la matrice P

on pose donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (qui est bien symétrique) et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

alors $AP = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

donc $AP = PD$ et de l'inversibilité de P, on déduira $A = PDP^{-1}$
comme on nous demande P^{-1} ici, c'est ce qui justifiera l'inversibilité (sinon cf. remarque)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 - 2L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ \end{array} \text{ donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque : si P^{-1} n'est pas demandée, l'argumentaire ci-dessous suffit à justifier que P est inversible et donc à passer de $AP = PD$ à $A = PDP^{-1}$

alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (car composée d'un vecteur non nul), ainsi que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ (car composée de deux vecteurs non proportionnels)

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre car il s'agit d'une concaténation de familles libres de sous-espaces propres distincts, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est composée de 3 éléments, ce qui est égal à la dimension de l'espace.
donc la matrice P composée de ces vecteurs est inversible

Remarque : l'objectif pour nous était de diagonaliser comme ci-dessus, mais on peut en fait le faire plus rapidement.
Grâce à l'énoncé, du fait de sa symétrie et de la donnée de ses deux premières lignes, on sait que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est le seul coefficient qui reste à déterminer. Comme on sait que P contient en colonne des vecteurs propres, avec U la troisième colonne, il suffit de tester $AU = \lambda U$ (sans préjuger de la valeur propre λ) pour trouver que α vaut forcément 1 (et $\lambda = -1/2$). En testant les colonnes, on devine alors que $D = \text{Diag}(1, -1/2, -1/2)$ et il suffit de montrer $AP = PD$ (puis de déterminer P^{-1})

5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments. *3 points*

Au préalable, on montre par récurrence $A^n = PD^nP^{-1}$,
pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_3 = PI_3P^{-1}$
ce qui est le cas car $PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie donc par hypothèse $A^n = PD^nP^{-1}$
~~on commence par inverser la formule qui définit D : $D = P^{-1}AP \Rightarrow PD = PP^{-1}AP \Rightarrow PD = I_3AP \Rightarrow PD = AP \Rightarrow PDP^{-1} = APP^{-1} \Rightarrow PDP^{-1} = AI_3 = A$~~
donc $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie donc par théorème de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est vraie, i.e. } A^n = PD^nP^{-1}}$

reste à expliciter A^n, en calculant, avec la propriété sur les matrices diagonales qui nous donne D^n, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et même dans $\mathbb{N}$) :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

donc $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ (bien valable pour $n = 0$)

6. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$
On note

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = AX_{n-1}$

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^nX_0$ *1 point*

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: $X_n = A^nX_0$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow X_0 = A^0X_0 \Leftrightarrow X_0 = X_0$
ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par définition, $X_{n+1} = AX_n$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = AX_{n-1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$)
et par hypothèse de récurrence $X_n = A^NX_0$
donc $X_{n+1} = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$, i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est vraie, i.e. } X_n = A^nX_0}$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$ *2 points*

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la formule de A^n étant également vraie pour $n = 0$)

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n u_0 \\ \left(1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n v_0 \\ \left(1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n u_0 \\ 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n v_0 \\ 1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n w_0 \end{pmatrix} \text{ et donc } \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

c. Déterminer les limites respectives u, v, w de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini. *0,5 point*

Comme $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ et u_n, v_n, et w_n tendent vers $\dfrac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$

donc $\boxed{u = v = w = \dfrac{1}{3}}$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$

d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *2 points*

$$\text{On a } d_n^2 = \left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 + \left[\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 + \left[\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2\right]$$

et comme u_0, v_0, w_0 sont trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$

alors $0 \leqslant u_0 = 1-\ (v_0 + w_0) \leqslant 1$ et $\dfrac{-2}{3} \leqslant \dfrac{-1}{3} \leqslant u_0 - \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{2}{3}$

donc $\left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 \leqslant \dfrac{4}{9}$ et de même pour $\left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)^2$ et $\left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)^2$

donc $\left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 \leqslant \dfrac{4}{3} \leqslant 4$

finalement $d_n^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 4$ et donc $\sqrt{d_n^2} \leqslant \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 4}$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$

or $\sqrt{d_n^2} = |d_n| = d_n$ car $d_n \geqslant 0$ et $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 4} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \sqrt{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : d_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}}$

e. Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leqslant 10^{-2}$ *1 point*

Comme $2^7 = 128$ alors pour $n = 8$ on a $2^{n-1} = 128$ et $d_8 \leqslant 10^{-2}$

donc $\boxed{\text{pour } n = 8 \text{ on a bien } d_8 \leqslant 10^{-2}}$