Indications.
Partie I.
Question 3a) : bilinéarité de la covariance.
Question 3b) : Deux triplets n'ayant qu'au plus un sommet commun s'écrivent : $t_i = \{u, v, w\}$ et $t_j = \{x, y, z\}$ avec $y, z \notin \{u, v, w\}$. Donc les variables $T_{u,v} \ldots T_{y,z}$ sont toutes indépendantes (correspondent à des arêtes différentes) : Y_i et Y_j sont indépendantes.

Ensuite, pour l'expression de $\mathbf{V}(Z_n)$, remarquer que :

$$\{(i,j); (i,j) \in [\![1,r]\!]^2\} = \{(i,i); i \in [\![1,r]\!]\} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}, \quad \text{la réunion étant disjointe.}$$

En effet, pour un couple (i,j) avec $i \neq j$, on a nécessairement $(i,j) \in \mathcal{E}$ $(i \equiv j)$ ou $(i,j) \in \mathcal{F}$ $(i \not\equiv j)$.

Donc :

$$\mathbf{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{F}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Dans la première somme, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_i) = \mathbf{V}(Y_i)$ et dans la dernière somme, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ car $(i,j) \in \mathcal{F}$ et Y_i, Y_j sont indépendantes.
Question 4) : si $i \equiv j$, on peut noter $t_i = \{u, v, x\}$ et $t_j = \{u, v, y\}$.
Remarquer ensuite que pour deux variables Z_1, Z_2 suivant une loi de Bernoulli,

$$\mathbf{E}(Z_1 Z_2) = \mathbf{P}([Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 1]).$$

Donc (avec l'indépendance) : $\mathbf{E}(Y_i Y_j) = \mathbf{P}(T_{u,v} = 1)\mathbf{P}(T_{u,x} = 1)\mathbf{P}(T_{v,x} = 1)\mathbf{P}(T_{u,y} = 1)\mathbf{P}(T_{v,y} = 1)$

Question 5) : Choisir un triplet $(\{u, v\}, w, x)$ c'est choisir d'abord $\{u, v\}$: combien de possibilités ? Puis, ce choix fait, c'est choisir w : combien de possibilités ? puis...

a_n correspond exactement au nombre de triplets $(\{u, v\}, w, y)$ de la sorte.
Partie II : exclusivement Python.
Revoir le TP 1 sur les graphes.

La fonction Mystère renvoie une valeur approchée de $\mathbf{P}(Z_n = 0)$.

Partie III :

Question 9 a) Séparer les cas $x > y$ et $x \leqslant y$.
Question 9b) Développer la relation du 9a, faire passer à droite ce qu'il faut et multiplier par ce qu'il faut pour utiliser ensuite le théorème de transfert.

Question 9b), niveau 2 :

Commencer par écrire, pour $(x, y) \in X(\Omega)^2$:

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y) + g(x)f(y)$$

Multiplier le tout par $\mathbf{P}(X = x)$ puis utiliser le théorème de transfert pour obtenir :

$$\mathbf{E}(f(X)g(X)) + f(y)g(y) \geqslant g(y)\mathbf{E}(g(X)) + f(y)\mathbf{E}(g(X))$$

Question 9c) : Multiplier la relation précédente par $\mathbf{P}(X = y)$ puis utiliser à nouveau le théorème de transfert (remarquer que $\mathbf{E}(f(X)g(X)), \mathbf{E}(f(X)), \mathbf{E}(g(X))$ sont des constantes dans la relation du 9b)) :

$$\mathbf{E}(f(X)g(X)) + \mathbf{E}(f(X)g(X)) \geqslant \mathbf{E}(g(X))\mathbf{E}(g(X)) + \mathbf{E}(f(X))\mathbf{E}(g(X))$$

Question 10 a) En notant $\mathcal{X}_k = X_1(\Omega) \times \ldots \times X_k(\Omega)$, remarquer que :

$$\sum_{(x_1,\ldots x_{k+1})\in\mathcal{X}_{k+1}} \ldots = \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} \sum_{(x_1,\ldots x_k)\in\mathcal{X}_k} \ldots$$

Question 10c) : c'est l'hypothèse faite sur f et g et on applique la proposition (H_1).
Question 10e) : f est k décroissante ssi $-f$ est k croissante.
En changeant f et g en $-f$ et $-g$, l'inégalité subsiste.

Le cas f k-décroissante et g k-croissante revient à ne changer le signe que d'une seule fonction, donc à multiplier l'inégalité par -1 : l'ordre est donc inversé.
La partie **IV** reprend la notion d'espérance conditionnelle. C'est une partie très technique et d'un niveau plus élevé que le reste. Des questions restent toutefois très abordables (et indépendantes du reste) comme par exemple les questions 14, 16d, 18. Il y avait aussi quelques résultats assez directs en supposant les autres admises, comme les questions 12, 17c par exemple.

Question 11. L'intersection donnée dans l'énoncé signifie qu'il n'y a aucune arête dans le graphe.

Question 12.
Remarquer que, pour une variable R suivant une loi de Bernoulli, $\mathbf{P}(R = 1) = \mathbf{E}(R)$. C'est un résultat qu'on réutilisera plusieurs fois dans cette partie.
Ici, $1 - Y_i$ est une telle variable, ainsi que $\displaystyle\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)$.

Questions 13 a) et b).
Questions un peu délicates à rédiger, le but étant d'écrire quelque chose de la forme :

$$Y_k = \Phi_k(T_{a_1}, \ldots T_{a_m})$$

avec $\Phi_k(x_1, \ldots x_m) = x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}$.

Question 14 : très classique, par récurrence en remarquant par exemple que $\mathbf{P}(A\cup B) \leqslant \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$ pour deux événements A et B quelconques. A savoir faire.

Question 15. Revenir à l'écriture d'une probabilité conditionnelle sous la forme d'un quotient.

Question 16.
Notations assez difficiles à digérer, mais une fois le travail fait, les questions a), b), c) s'enchaînent.
Question 17.
a) : formule des probabilités composées.
b) question difficile et très technique.

Remarquer que $\mathbf{P}(A_1) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1}) \leqslant \exp(-\mathbf{P}(A_1))$.
Puis utiliser les questions 16d) et 17a) pour obtenir :

$$\mathbf{P}(Z_n = 0) \leqslant \exp\left(-\mathbf{E}(Z_n) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbf{P}\left(\overline{A_j} \cap \overline{A_i}\right)\right)$$

Enfin, remarquer que $\mathbf{E}(Y_iY_j) = \mathbf{P}\left(\overline{A_j} \cap \overline{A_i}\right)$ et que $\mathcal{E}$ est la réunion de deux ensembles, ceux pour lesquels $i \equiv j$ avec $j < i$ et ceux pour lesquels $i \equiv j$ avec $i < j$.
Ces deux ensembles ont même cardinal, et conclure que :

$$\Delta_n = 2\sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i}\mathbf{E}(Y_iY_j)$$

puis la relation demandée.

Question 17c) : immédiat avec le résultat précédent.
Question 18.
A savoir faire, indépendantes du reste sauf la question 17c).
Question 19 : il s'agit de donner une valeur approchée de $\exp(-1/6)$.
Question 20 c et d) : difficiles.

Pour le c) : observer l'égalité :

$$\mathbf{E}_{\overline{A_i}}\left(Y_j\prod_{k\in J_i}(1-Y_k)\right) = \mathbf{P}_{\overline{A_i}}\left(\overline{A_j} \cap C_i\right)$$

en remarquant que $Y_j\prod\limits_{k\in I_i}(1-Y_k)$ est une variable de Bernoulli.

Il fallait ensuite observer que $Y_j\prod(1-Y_k)$ rentrait dans le cadre de l'inégalité de Harris avec f croissante (pour Y_j) et g décroissante (pour $\prod(1-Y_k)$), donc l'inégalité dans le sens inverse de celui donné dans l'énoncé en début de partie III (cf. question 10e). Puis appliquer l'inégalité de Harris pour majorer l'espérance conditionnelle.