Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

- diagonaliser une matrice pour résoudre un système linéaire d'équations différentielles ☐
- déterminer l'unique solution vérifiant des conditions initiales ☐
- déterminer un ou des point(s) d'équilibre d'un système différentiel et étudier leur stabilité ☐

1 Systèmes linéaires d'équations différentielles

Définition : avec I un intervalle,
un **système différentiel linéaire** (homogène) est l'ensemble des systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1(t)+\cdots+a_{1,n}x_n(t) &= x_1'(t)\\ a_{2,1}x_1(t)+\cdots+a_{2,n}x_n(t) &= x_2'(t)\\ \dots &= \dots\\ a_{n,1}x_1(t)+\cdots+a_{n,n}x_n(t) &= x_n'(t)\end{cases}$$

où $t\in I$ et $(x_1(t),\dots,x_n(t))$ sont des fonctions $\mathscr{C}^1$ définies sur I

ce système différentiel est équivalent à l'équation :

$$\boxed{\forall t\in I,\quad X'(t)=AX(t)}\qquad (\mathscr{S})$$

où :

- pour $t\in I$, $X(t)$ est le vecteur colonne ${}^t(x_1(t),\dots x_n(t))\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- pour $t\in I$, $X'(t)$ est le vecteur colonne dérivé en t : $X'(t)={}^t(x_1'(t),\dots x_n'(t))\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarques :

- un système différentiel est analogue à un système linéaire, mais les inconnues sont des fonctions et les équations sont des équations différentielles (qui mélangent plusieurs « fonctions inconnues ») ;
- on ne le précise généralement pas, mais les équations différentielles du système sont homogènes (pas de second membre ici).

Exemple :

$$\begin{cases} 5x(t)+3y(t) &= x'(t)\\ 2x(t)-7y(t) &= y'(t)\end{cases}$$

où $t\in\mathbb{R}$ est un système différentiel que nous écrirons

$X'(t)=AX(t)$ où $A=\begin{pmatrix}5&3\\2&-7\end{pmatrix}$

$X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ et donc $X'(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$

Définition et propriété - problème de Cauchy :
pour $t_0\in I$ et $(\alpha_1,\dots\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, la condition $X(t_0)={}^t(\alpha_1,\dots\alpha_n)$ est appelée **condition de Cauchy**, ou **condition initiale**.

Le système $(\mathscr{S})$ muni d'une condition de Cauchy est appelé **problème de Cauchy**.

Un problème de Cauchy admet une unique solution, autrement dit $(\mathscr{S})$ admet une et une seule solution X satisfaisant $X(t_0)={}^t(\alpha_1,\dots\alpha_n)$

Remarque : on parle de conditions initiales car on prendra souvent $t_0=0$ dans un problème d'évolution.

Exemple : le problème de Cauchy $X'(t)=AX(t)$ avec $A=\begin{pmatrix}5&3\\2&-7\end{pmatrix}$ et $X(0)=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ admet une unique solution

2 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 et système différentiel

Propriété :
l'équation différentielle $\quad y''=ay'+by$

est équivalente au système différentiel : $\begin{cases} y' &= z\\ z' &= by+az\end{cases}$

Exemple : l'équation différentielle $y''=2y'-5y$ peut être étudiée avec le sytème différientiel :

$X'=AX$ où $X={}^t(y,y')$ et $A=\begin{pmatrix}0&1\\-5&2\end{pmatrix}$

Remarque : on peut poursuivre l'analogie sur des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre $3,4,\dots$ (possible en exercice, c'est alors guidé).

3 Méthode de résolution avec une matrice diagonalisable

Il s'agit du cas de référence à connaitre pour résoudre le système différentiel $(\mathscr{S})$: $X' = AX$

Etape	Description
1.	on diagonalise la matrice A (cf. le cours sur la réduction)
2.	$(\mathscr{S})$ devient alors $X' = PDP^{-1}X$ ce qui entraine $P^{-1}X' = DP^{-1}X$
3.	$Y' = DY$, en posant $Y = P^{-1}X$ ($\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) (on admet $Y' = P^{-1}X'$, i.e. les coefficients de la matrice $P^{-1}X'$ sont les dérivées des coefficients de $Y = P^{-1}X$)
4.	on résout alors n équations différentielles linéaires du premier ordre : $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$, où $y_i(t)$ est le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de Y et λ_i est le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de D (valeur propre de A), on trouve $y_i = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$)
5.	on détermine X avec $X = PY$ et pour chaque i, on trouve une forme du type $x_i(t) = C_{i,1}\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_{i,2}\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_{i,1}\alpha_3 e^{\lambda_3 t} + \ldots$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont les valeurs propres de A, les $C_{i,j}$ les coefficients de P (des constantes) et les α_i les paramètres
6. (option)	on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales (cela donne un système à résoudre).

4 Points d'équilibre et stabilité

<u>Définitions</u> : on appelle **trajectoire** du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble de la forme $\{(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ où $(x_1, ..., x_n)$ est une solution on dit qu'une trajectoire **converge** si pour tout i, x_i admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$	<u>Exemple</u> : on trouve la solution $x_1(t) = 7e^{-3t} - 4e^{-5t}$ $x_2(t) = -e^{-3t} + \sqrt{2}e^{-5t}$ il s'agit d'une trajectoire convergente car $\lim\limits_{x \to +\infty} x_1(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} x_2(t) = 0$
<u>Définition</u> : une solution X^* est un **état (ou point) d'équibre** lorsqu'elle est constante. autrement dit un état d'équilibre est un vecteur colonne X^* vérifiant $AX^* = 0_{n,1}$	<u>Remarques</u> : • $0_{n,1}$ est toujours un état d'équilibre • sinon $AX^* = 0$ et $X^* \neq 0_{n,1} \Leftrightarrow X^*$ est vecteur propre de A (et donc A est non inversible)
<u>Propriété</u> : avec le système différentiel $X' = AX$, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. • si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ces points d'équilibres sont stables. • si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.	<u>Exemples</u> : • dans l'exercice 2, toutes les trajectoires convergent : $X(t) = \begin{pmatrix} 3\lambda e^{-t} - \mu e^{-2t} \\ -2\lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} \end{pmatrix}$ • dans l'exercice 7, les états d'équilibre ne sont pas stables car une valeur propre est strictement positive : $X(t) = C_0 e^{-3t}U + C_1 V + C_2 e^{3t} W$ (si $C_2 \neq 0$, la trajectoire diverge)

Interprétation des systèmes différentiels linéaires

Dans la « vie courante », ces systèmes peuvent être issus de problèmes d'évolution dans le temps, d'où l'usage de la variable t (temporelle) pour les fonctions : problèmes physiques, économiques...
Par exemple en économie, on peut modéliser une évolution (la dérivée) de l'offre qui dépend du prix et de même une évolution du prix qui dépend de l'offre, ce qui donne un système différentiel.