

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

On note pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

- b. Calculer I_0 et I_1

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$

4. Soit x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$

Montrer que $F(y) \leq F(x)$

Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

5. a. Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$

On distinguera le cas $x = 0$ et le cas $x > 0$

- b. Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$$

- c. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$$

- d. A l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

- a. Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} (1-xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$$

- b. En déduire que :

$$0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$$

7. a. En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$$

- b. Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$

En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F . On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0