TD 6 - intégrales généralisées - complément

Quelques calculs d'intégrales supplémentaires

Corrigé

1. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)^7 \mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\left[(2-x)^8\right]_0^2 = 32$

2. $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^{1/2} = \frac{e-1}{2e}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(2+x)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2+x)^2}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{9}$

5. Pour $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(1-t)^{n-1}}\right]_0^{1/2} = \frac{2^{n-1}-1}{n-1}$.

Pour $n=1$: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -[\ln(1-t)]_0^{1/2} = \ln(2)$.

Pour $n=0$: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)^0}\mathrm{d}t = \int_0^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

6. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = [\ln(1+e^x)]_0^{\ln(2)} = \ln(3)-\ln(2)$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$.

8. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$.

9. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$.

11. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = -\left[e^{-x^2/2}\right]_0^1 = 1-\sqrt{e}$.

12. Pour $A>0$: $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{(1+2x)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\left[(1+2x)^{-2}\right]_0^A = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{(1+2A)^2}$.

En faisant tendre A vers $+\infty$: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+2x)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}}$

13. Pour $A>0$, par IPP : $\displaystyle\int_0^A xe^{-x}\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-x}\mathrm{d}x = 1-e^{-A}-Ae^{-A}$.
En faisant tendre A vers $+\infty$, avec les croissances comparées :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1.}$$

14. Pour $A>0$, par IPP : $\displaystyle\int_0^A x^2e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^A + 2\int_0^A xe^{-x}\mathrm{d}x$.
En faisant tendre A vers $+\infty$, avec les croissances comparées et le résultat précédent :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 2}.$$

15. IPP : pour $A>1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^3}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t)}{2t^2}\right]_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$

$$= -\frac{\ln(A)}{2A^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t^2}\right]_1^A = \frac{1}{4} - \frac{1}{4A^2} - \frac{\ln(A)}{2A^2}$$

Quand $A \to +\infty$, avec les croissaces comparées : $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.}$

16. $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^n}$ est positive, continue sur $\mathbb{R}_+$, et $\dfrac{1}{(1+t)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\mathrm{d}t$ converge ssi $n \geqslant 2$.

Pour $n \geqslant 2$ et $A > 0$:
$\displaystyle\int_0^A \frac{1}{(1+t)^n}\mathrm{d}t = -\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(1+t)^{n-1}}\right]_0^A = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{(1+A)^{n-1}}\right).$

En faisant tendre A vers $+\infty$: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}}$.

17. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente : $\boxed{I = \dfrac{1}{2}}$

18. Pour $A > 0$: $\displaystyle\int_0^A x e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2}$.

En faisant tendre A vers $+\infty$: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1}$.

19. $I = \displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

On pose : $u = \sqrt{t}$.
$t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, $t = 0 \Rightarrow u = 0$ et $t = 1 \Rightarrow u = 1$, donc :

$$I = \int_0^1 2ue^u\mathrm{d}u$$

Avec une IPP, on trouve : $\boxed{I = 2}$.

20. $I = \displaystyle\int_0^{1/2} t^2\ln(1+2t)\mathrm{d}t$.

On pose : $u = 1 + 2t$.

$t = \dfrac{u-1}{2}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$, $t = 0 \Rightarrow u = 1$ et $t = 1/2 \Rightarrow u = 2$, donc :

$$I = \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{4}\ln(u) \times \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_1^2 (u-1)^2\ln(u)\mathrm{d}u.$$

Par IPP :

$$I = \frac{1}{8}\left[\frac{(u-1)^3}{3}\ln(u)\right]_1^2 - \frac{1}{24}\int_1^2 (u-1)^3 \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u.$$

La dernière intégrale se calcule directement en développant le cube :

$$\int_1^2 (u-1)^3 \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int_1^2 \left(u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - 3\frac{u^2}{2}\right]_1^2 + 3 - [\ln(u)]_1^2$$

$$= \frac{5}{6} - \ln(2)$$

Donc : $\boxed{I = \dfrac{1}{12}\left(\ln(2) - \dfrac{5}{12}\right)}$.

21. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

On pose $I(A) = \displaystyle\int_0^A e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ pour $A > 0$, et le changement de variables $u = \sqrt{t}$.
$t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, $t = 0 \Rightarrow u = 0$ et $(t = A) \Rightarrow (u = \sqrt{A})$, donc :

$$I(A) = 2\int_0^{\sqrt{A}} ue^{-u}\mathrm{d}u.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, $\boxed{I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = 2}$ (calcul déjà fait).