Intégrales généralisées

- définition de la convergence d'une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $\int_{-\infty}^b f(t)dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ où f est une fonction continue sur l'intervalle concerné
- démonstration de la convergence et/ou calcul d'une intégrale généralisée
- propriétés des intégrales convergentes : linéarité, positivité, convergence absolue
- intégration par parties, changement de variables, on passera alors obligatoirement par une intégrale sur un segment (sauf dans le cas d'un changement de variables affine)
- intégrales de référence en $+\infty$: Riemann ou $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ (où $\alpha > 0$)
- théorèmes de comparaison pour des fonctions positives ($f \leqslant g, f = o(g)$ et $f \sim g$)
- extension aux intégrales de fonctions continues sauf en un nombre fini de points (et admettant une limite finie à gauche et à droite en tout point)

Systèmes différentiels

C'est l'occasion de reparler de réduction. On rappelle que pour montrer qu'une matrice est diagonalisable, il faut arriver à une relation du type $A = PDP^{-1}$ (ou $AP = PD$ en justifiant que P est inversible, par exemple car composée en colonnes d'une base : car des vecteurs propres associés à ...).

On rappelle aussi que (pour la recherche de valeurs propres), la résolution de systèmes avec un paramètre n'est pas un attendu du programme.

- systèmes différentiels linéaires homogènes se ramenant à une équation de type $X'(t) = AX(t)$ (où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est à coefficients constants, $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)
- cas très classique : A diagonalisable (voir la méthode du cours en passant par la diagonalisation de A puis $Y(t) = P^{-1}X(t)$)
- problème de Cauchy (dans les cas du programme) et unicité de la solution
- notion de trajectoire (une solution) et de convergence d'une trajectoire
- état ou point d'équilibre (notation X^*) : il s'agit d'une solution constante
- le point d'équilibre sera dit stable si toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre (cas où toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles)
- cas moins classique : A non diagonalisable, on est alors guidé vers « une résolution avec une matrice triangulaire »
- les systèmes non homogènes du type $X'(t) = AX(t) + B(t)$ ne sont pas au programme, mais peuvent faire l'objet d'exercices en se ramenant à des notions au programme

On s'appuie toujours sur le programme de première année :

- résolution d'équations différentielles linéaires homogènes du premier ou second ordre
- résolution également avec second membre constant
- si le second membre n'est pas constant, on guide la recherche de solution particulière
- principe de superposition dans les deux derniers cas