Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, on pose $f(x) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_2)$
Montrer que f est un endomorphisme de E

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. Pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on note $\varphi(P)$ le polynôme défini par : $\varphi(P)(x) = xP'(x)$
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2, \quad f(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3 \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

1. Ecrire la matrice A de f relative à la base $\mathscr{B}$

2. On pose $u = e_1 - e_2 + 2e_3$. Déterminer $f(u)$

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$
On pose, pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, $f(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E

2. Déterminer la matrice canoniquement associée à f

Exercice 5

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ où $e_i : x \mapsto x^i$ pour $i \in [\![0, 2]\!]$
On pose, pour $P \in E$, $f(P)(x) = xP'(x) - P(x)$ et on admet que f est un endomorphisme de E
Déterminer la matrice M de f relative à la base $\mathscr{B}$

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Sans calculer A^2, montrer que : $f \circ f = -3f$

2. Que peut-on déduire de la question **1.** pour la matrice A ?

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$
Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, on pose $f(x) = (x_1, 2x_2 - x_3, x_1 + x_2)$
On admettra que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (cf. **exercices 1** et **4**).

1. Déterminer la matrice A de f relative à $\mathscr{B}$

2. Déterminer les matrices de $f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f$ et $(f - id_E)^3$ relatives à $\mathscr{B}$

3. Montrer que $g = f + id_E$ est un endomorphisme bijectif. Quelles sont les matrices de g et de g^{-1} relatives à $\mathscr{B}$?

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par :

$$f(e_1) = f(e_4) = e_1 + e_4 \qquad f(e_2) = f(e_3) = e_2 + e_3$$

1. Ecrire la matrice A de f relative à $\mathscr{B}$
2. Déterminer une base du noyau de f

Exercice 9

On munit $\mathbb{R}_2[x]$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$

Soit u un endomorphisme de E représenté par la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$

Exercice 10 - questions classiques

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$f(e_1) = -e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = 2e_1 + 3e_3$$

1. Ecrire la matrice A de f relative à $\mathscr{B}$
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$
Pour $P \in E$, on pose $f(P)(x) = P(x+1) - 2P(x) + P(x-1)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer la matrice A de f relative à $\mathscr{B}$
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exercice 12

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M

1. Montrer que le rang de M est égal à 2
2. En déduire, sans résoudre de système linéaire, que : $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$

Exercice 13 - classique

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même défini par :

$$\text{pour tout } u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(u) = (-x + 2y + z,\ x + z\ ,\ 3x - 3y + z)$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

2. Déterminer la matrice A de f relative à la base canonique $\mathscr{B}$

3. On pose $v = e_1 - e_3$, et $w = f(e_3) - e_3$

- **a.** Calculer v, $f(v)$ et $f(w)$. Montrer que $\mathscr{B}' = (v, w, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
- **b.** Déterminer la matrice B de f relative à la base $\mathscr{B}'$
- **c.** Exprimer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$
- **d.** Calculer P^{-1}
- **e.** Donner la relation entre A, B et P

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire explicitement A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 14

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à 2, muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ où $e_k : x \mapsto x^k$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$
Pour $P \in E$, on note $T(P)$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^1 P(x - t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E

2. Déterminer la matrice M de T relative à la base $\mathscr{B}$

Exercice 15 - classique On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$
Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, on note :

$$f(x) = (2x_1 - x_2 + 3x_3, -x_1 + 3x_2 - 4x_3, -3x_2 + 3x_3)$$

et on admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer la matrice M de f relativement à la base $\mathscr{B}$

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$

3. Déterminer le rang de f

4. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 16

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ muni de sa base canonique $(1, x, x^2)$
On pose, pour tout $P \in E$, $g(P)(x) = (x+1)P'(x)$ et $f(P)(x) = g(P)(x) - 2P(x)$

1. Montrer que g est un endomorphisme de E et vérifier que $f = g - 2id_E$

2. En posant $P = ax^2 + bx + c$, déterminer les coefficients du polynôme $Q(x) = f(P)(x)$ en fonction de a, b, c

3. En déduire que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((x+1)^2)$

4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[x]$

5. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 17 - classique : recherche de noyaux et d'images

Soit f l'endomophisme de $\mathbb{R}^4$ représenté suivant la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$

2. En déduire le rang de f

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$

4. On pose : $u = e_1 + e_4$, $v = e_2$, $w = e_2 + e_3$. Montrer que (u, v, w) est (aussi) une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exercice 18 - encore : recherche de noyaux et d'images

Pour chacune des matrices A_i suivantes ($i \in [\![1, 6]\!]$) représentant canoniquement une application linéaire f_i, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_i)$, puis une base de $\mathrm{Im}(f_i)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 19

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même défini par :

$$\text{pour tout } u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(u) = (-3x - 3y, 4x + 5y, y + 2z)$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

2. Déterminer la matrice A de f relative à la base canonique.

3. Calculer A^2, A^3. Quels endormorphismes représentent ces matrices ?

4. Montrer que $A^3 = 4A^2 - A - 6I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}
Quel endomorphisme représente A^{-1} ?

5. On pose $e_1 = (-1, 2, 2)$, $e_2 = (0, 0, 1)$, $e_3 = (9, -6, 2)$

   a. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

   b. Déterminer la matrice de f relative à $\mathscr{B}$

Exercice 20 - exercice classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme représenté par A relativement à la base canonique $\mathscr{B}$

On pose $u = (2, 1, -2)$

1. **a.** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$

b. La matrice A est-elle inversible ?

2. **a.** Déterminer le vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et tel que $f(v) = u$

b. Déterminer le vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et tel que $f(w) = v$

3. **a.** Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b. Ecrire la matrice N de f relative à la base $\mathscr{B}'$

c. Ecrire la matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$
Donner une relation entre N, P, et A

d. Calculer N^2, N^3. En déduire que : $A^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geqslant 3$

4. **a.** Montrer que A ne possède qu'une seule valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé.

b. Montrer que, pour tout réel λ non nul, $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ est un automorphisme, id_3 étant l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$

5. On note $g = f - id_3$

a. Ecrire la matrice B de g relative à la base canonique.
Ecrire la matrice M de g relative à la base $\mathcal{B}'$
Donner une relation entre B, M, P

b. Montrer que B est inversible et expliciter B^{-1}

c. Montrer qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = a_n I_3 + b_n N + c_n N^2$$

d. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$

e. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n \in \mathrm{Vect}(I_3, B, B^2)$

Exercice 21

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur à 2. On muni E de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ où $e_0 : x \longmapsto 1, \quad e_1 : x \longmapsto x, \quad e_2 : x \longmapsto x^2$

Pour $f \in E$, on pose $u(f)$ la fonction définie par : $u(f)(x) = (3 + 2x)f(x) - (2 + 3x + x^2)f'(x)$

1. Montrer que u est linéaire sur E

2. Déterminer les fonctions $u(e_0)$, $u(e_1)$ et $u(e_2)$
En déduire que u est un endomorphisme de E

3. Déterminer la matrice de u relative à la base canonique B

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$. u est-il un isomorphisme ?

5. Soit $f : x \mapsto (x-1)^2$. Déterminer $u(f)$

6. Déterminer les fonctions polynomiales g de degré au plus 2 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (3 + 2x)g(x) - (2 + 3x + x^2)g'(x) = -5x^2 - 2x + 7$$

Exercice 22 - endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, classique aussi

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - M$$

On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

2. Déterminer la matrice K de f relative à la base $\mathscr{B}$

3. Déterminer une base du noyau de f

4. Déterminer une base de l'image de f

5. Calculer K^2
En déduire les valeurs propres de K et les sous-espaces propres associés.
K est-elle diagonalisable ?

6. Soit $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

- **a.** Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
- **b.** Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$
- **c.** Soit Δ la matrice de f relative à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $K = P\Delta P^{-1}$

Exercice 23 - théorème du rang et matrices semblables

Soit a, b deux réels. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad N = A - I_3, \quad M = N^2 - N$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
On note f, g, h les endomorphismes représentés respectivement par les matrices A, N, M suivant $\mathscr{B}$

1. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice associée à f^{-1} relativement à la base $\mathscr{B}$

2.
- **a.** Montrer que, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $\mathrm{rg}(g) = 1$
- **b.** On suppose que $ab \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Montrer que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une famille libre et en déduire que $\mathrm{rg}(g) = 2$

3. On suppose que $ab \neq 0$, et on pose $u = e_3$
- **a.** Montrer que $\mathscr{C} = (g^2(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de g dans la base $\mathscr{C}$
- **b.** Justifier que N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **c.** Montrer que M et N sont semblables.
- **d.** Montrer que A et A^{-1} sont semblables.