La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.
Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

Partie I : réduction d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A suivant la base $\mathscr{B}$
On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Comparer $A(A+I)^2$ et $(A+I)^2$
2. En déduire les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre associé.
3. La matrice A est-elle inversible ? si oui, calculer A^{-1} en fonction de A^2, A et I
4. On note $u_1 = (1,0,2), u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (1,-1,2)$
   - **a.** Calculer $f(u_1)$ et $f(u_3)$
   - **b.** Exprimer $f(u_2)$ comme combinaison linéaire de u_1 et de u_2
   - **c.** Montrer que $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   - **d.** Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{U}$
   - **e.** Ecrire la matrice T de f relative à la base $\mathscr{U}$
   - **f.** Donner une relation entre T, A et P, en la justifiant soigneusement.

Partie II : une application, résolution d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

On posera, pour tout $t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ la matrice P étant celle obtenue dans la **partie I** question **4.d.**

On dira indifféremment que x_1, x_2, x_3 sont les inconnues du système $\mathscr{S}$ ou que X est l'inconnue du système $\mathscr{S}$

1. Montrer que X est solution du système $\mathscr{S}$ si, et seulement si Y est solution du système :
$$\mathscr{S}' : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = TY(t)$$
où T est la matrice obtenue dans la **partie I** question **4.e.**.
2. **a.** Justifier l'existence d'un réel λ tel que y_1 soit solution de l'équation différentielle :
$$(E_\lambda) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = \lambda e^{-t}$$
b. Trouver une solution particulière de (E_λ) de la forme $t \mapsto a_\lambda t e^{-t}$ où a_λ est un réel à déterminer.
c. Résoudre (E_λ)
3. Résoudre $\mathscr{S}'$ puis $\mathscr{S}$
4. Justifier que toutes les composantes de X ont la même limite en $+\infty$
5. Quel est l'unique point d'équilibre de $\mathscr{S}$? Est-il stable ? (justifier la réponse)

Exercice 2

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

1. **a.** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x
b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x
c. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. **a.** Montrer que f est impaire.
b. Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. **a.** Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2}$
b. En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$
4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$
a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.
b. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln\left(1+x^2\right)$
c. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$
d. Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$
5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0
a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$
On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :
$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$
b. Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$
c. En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t$

1. **a.** La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b. Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f

2. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

3. **a.** Etablir l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$

b. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

4. **a.** Montrer que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$

c. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$

d. En déduire que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt$

Exercice 3

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \ldots$
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a. Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$

c. Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$

d. Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$

e. En déduire que : $P(V_n) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $P(V) = 0$

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a. On rappelle qu'en *Python* la commande `rd.randint(a,b+1)` renvoie un nombre aléatoire qui est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a,b]\!]$
Compléter la fonction *Python* ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T

```
def T():
  X = 0 ,  Y = 0 ,  Z = 0 ,  n = 0
  liste = np.array([X,Y,Z])
  while --------:
    i = np.random.randint(1,4,(1,1))  # choix d'un entier entre 1 et 3
    liste[i-1] = liste[i-1] + 1 # l'urne i reçoit un jeton de plus
    n=n+1
  t=----
  return t
```

b. Ecrire un script Python qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$

5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega), \quad P(T=n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. **a.** Donner la loi du couple (X_2, W_2)

b. En déduire la loi de W_2 et calculer son espérance.

c. Calculer la covariance de X_2 et W_2

d. Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3

8. Déterminer $W_n(\Omega)$

9. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

a. Montrer que : $\forall i \in [\![1,3]\!],\ E(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b. Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$

c. Exprimer alors $E(W_n)$ en fonction de n

10. Démontrer que : $P\Big((X_n = n) \cap (W_n = 2)\Big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $P\Big((X_n = k) \cap (W_n = 2)\Big)$?

11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big) = \dfrac{2\binom{n}{k}}{3^n}$

Que vaut $P\Big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\Big)$?

12. Démontrer que : $E(X_n W_n) = 2nP\Big((X_n = n) \cap (W_n = 2)\Big) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kP\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big)$

13. Montrer alors que $E(X_n W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, puis calculer la covariance de X_n et W_n

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.