Corrigé *Total sur XXX points*

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 2 *30 points*

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

1. **a.** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x *1 point*

On va utiliser la positivité de intégrales, en utilisant que $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$ et

<u>1er cas</u> : si $x \geqslant 0$ (i.e. les bornes sont dans l'ordre croissant) alors, par positivité de l'intégrale,

$f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt \geqslant 0$

<u>2ème cas</u> si $x \leqslant 0$, alors pour les mêmes raisons,

$\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt \geqslant 0$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt = -\int_x^0 \ln(1+t^2)dt \leqslant 0$

finalement, $\boxed{f \text{ est positive sur } [0,+\infty[\text{ et négative sur }]-\infty,0]}$

b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x *1 point*

D'après le théorème fondamental de l'intégration, f est une primitive de $t \mapsto \ln(1+t^2)$, donc f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)$

or, $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en tant que composition de fonctions continues (ln et un polynôme)

donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)}$

c. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f). *1 point*

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ donc $1+x^2 \geqslant 1$ et donc par croissance du logarithme $\ln(1+x^2) \geqslant \ln(1)$ i.e. $f'(x) \geqslant 0$

ainsi, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

2. **a.** Montrer que f est impaire. *1,5 points*

f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt$

on fait alors le changement de variable $u = -t$, $du = -dt$ et on obtient :

$f(-x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+(-u)^2)(-du) = -\int_0^x \ln(1+u^2)du = -f(x)$ ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

b. Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. *1,5 points*

$t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

comme le dénominateur est toujours positif, $f''(x)$ est du signe de x et donc $\forall x \in \mathbb{R}_-, f''(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) \geqslant 0$ et $f''(x)$ s'annule en 0 en changeant de signe

donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty;0] \text{ et convexe sur } [0;+\infty[\text{ et elle admet un point d'inflexion}}$ au point d'abscisse 0

3. **a.** Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2}$ *1,5 points*

Soit a et b deux réels tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{at^2+(a+b)}{1+t^2}$

ainsi, par identification, on doit avoir : $\begin{cases} a = 1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b=-1 \end{cases}$

ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}}$

Nota bene : le raisonnement par équivalence n'est pas nécessaire pour trouver que $a = 1$ et $b = -1$ fonctionne mais il l'est pour montrer que c'est l'unique solution, ce qui semble être demandé par l'énoncé.

b. En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a : *1 point*

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$, on pose alors :

$u'(t) = 1$ et $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$ et donc $v'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

$f(x) = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt.$

or d'après la question précédente,

$\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^x 1 - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

Ainsi, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right)$ soit $\boxed{f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente. *1,5 points*

$\dfrac{1}{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{1+t^2}$ car $\dfrac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \dfrac{t^2+1}{t^2} = 1 + \dfrac{1}{t^2} \underset{+\infty}{\to} 1$

de plus $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives sur $[1;+\infty[$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha > 1$) donc, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente

donc, par relation de Chasles, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est convergente}}$

b. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$ *2 points*

Nous avons démontré à la question **3.b.** que $f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

donc pour $x > 0$, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x\ln(1+x^2)\left(1 - \frac{2x}{x\ln(1+x^2)} + \frac{a(x)}{x\ln(1+x^2)}\right)$

où $a(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ et donc $\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1 - \dfrac{2}{\ln(1+x^2)} + \dfrac{a(x)}{x\ln(1+x^2)}$

or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t^2}dt$ est un nombre fini et par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+x^2) = +\infty$

donc par quotients de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{\ln(1+x^2)} + \dfrac{a(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1 - 0 + 0 = 1$

soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1$ i.e. $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)}$

c. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$ *2 points*

Soit $x > 0$, alors $2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = \ln\left(x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(1+x^2)$

or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{=} o(2\ln(x))$

donc $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{=} 2\ln(x) + o(2\ln(x))$ donc par propriété $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$

or $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$ donc par produit d'équivalents $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)}$

d. Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$ *1 point*

Comme f est impaire, on comprend que l'équivalent en $-\infty$ sera l'opposé de l'équivalent précédent mais on doit le modifier car il n'est pas défini pour $x \leqslant 0$, on utilise $2\ln(x) = \ln(x^2)$ et alors $\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} x\ln(x^2)}$ que l'on pourrait aussi écrire $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(|x|)$ (on a bien l'opposé car $x < 0$)

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0

a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ *1 point*

Pour les mêmes raisons que plus haut f' est une composée de fonctions $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) donc f' est $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) et donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^3}$ (et même $\mathscr{C}^\infty$)

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

b. Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ *1 point*

$f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$ et d'après les calculs précédents, pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \ln(1+x^2)$ et $f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ donc $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$

enfin $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2}$ donc $\boxed{f^{(3)}(0) = 2 \text{ et } f(0) = f'(0) = f''(0) = 0}$

c. En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 *1 point*

L'énoncé original était généreux sur cette question !
Ainsi, d'après la formule proposée (de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0) :

$f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{3!} \times 2 + o(x^3) \underset{0}{=} \dfrac{2x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc par propriété $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}}$

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$

1. **a.** La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ? *0,5 point*

Si on considère l'expression générale de u_n, $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt = \int_0^1 1dt = 1 = u_0$ ce qui est donc cohérent avec la valeur de u_0 donnée.

b. Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f *1 point*

Par définition, $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ donc $\boxed{u_1 = f(1)}$ par définition de f

2. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *2 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, alors $0 \leqslant t \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant t^2 \leqslant 1$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$
donc $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2 \leqslant e$ et donc $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$ par croissance de ln
donc $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$ et donc en multipliant l'inégalité précédente par $\left(\ln(1+t^2)\right)^n$ on trouve $\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \leqslant \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ et donc par croissance de l'intégrale (car $0 \leqslant 1$) :
$\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt \leqslant \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \left(\ln(1+t^2)-1\right)dt$

i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge. *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme vu à la question précédente $\forall t \in [0;1], \left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \geqslant 0$ i.e. $u_n \geqslant 0$ et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0}$
finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0
donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

3. **a.** Etablir l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ *1 point*

On a montré à la question **2.b.** que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$
donc $\ln(1+t^2)^n \leqslant (\ln(2))^n$ par croissance des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+$
donc par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant 1$) :
$\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln(2))^n dt$ i.e. $u_n \leqslant (\ln(2))^n$ par définition de u_n et car
$\displaystyle\int_0^1 (\ln(2))^n dt = (\ln(2))^n (1-0) = (\ln(2))^n$ (puisque $(\ln(2))^n$ ne dépend pas de t)

de plus $u_n \geqslant 0$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n}$

b. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ? *2 points*

Comme vu plus haut $1 < 2 < e \Rightarrow 0 \leqslant \ln(2) < 1$ par stricte croissante de ln
donc $(\ln(2))^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| = \ln(2) < 1$)
donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $u_n \to 0$
de plus la série de terme général $(\ln(2))^n$ converge car il s'agit d'une série géométrique avec $|q| < 1$
donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs ($u_n \geqslant 0$),

$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n \Rightarrow$ $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}}$

4. **a.** Montrer que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ *2 points*

On comprend qu'il faut travailler sur le dénominateur :
comme vu précédemment, pour $t \in [0;1], 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Rightarrow 1-\ln(2) \leqslant 1-\ln(1+t^2) \leqslant$

donc en applicant la fonction inverse, décroissante sur $]0,+\infty[$,
$1 \leqslant \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1-\ln(2)} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \dfrac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)}$ car $(\ln(1+t^2))^n \geqslant 0$ donc par croissance et positivité de l'intégrale $(0<1)$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)}dt$ et enfin par linéarité ($\dfrac{1}{1-\ln(2)}$ ne dépend pas de t), $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)}dt = \frac{1}{1-\ln(2)}\int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt = \frac{u_n}{1-\ln(2)}$

d'où $\boxed{0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}}$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$ *0,5 point*

D'après la question précédente,
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc par opération $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{1-\ln 2} = 0$

et donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = 0}$

c. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$ *1 point*

Soit n un entier naturel non nul, alors :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(\ln(1+t^2))^k\right) dt$ par linéarité de l'intégrale

donc, par somme des termes d'une suite géométrique, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt}$

d. En déduire que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt$ *1 point*

Ainsi,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$

or d'après la question **10.b.**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = 0$ par linéarité

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt$ (car cette dernière expression ne dépend pas de n)

soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt}$