Corrigé *Total sur 95 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points*

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 *26 points*

Partie I : réduction d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A suivant la base $\mathscr{B}$
On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Comparer $A(A+I)^2$ et $(A+I)^2$ *2 points*

$A+I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

alors $A(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

on trouve donc $\boxed{A(A+I)^2 = -2(A+I)^2}$

2. En déduire les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre associé. *5 points*

On en déduit que $P(x) = x(x+1)^2 + 2(x+1)^2 = (x+2)(x+1)^2$ est un polynôme annulateur de A
ses racines sont -2 et -1 donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1,-2\}$
on résout le système linéaire $AX = -2X \Leftrightarrow (A+2I)X = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = {}^{t}(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0 = 0 \\ 0 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -2x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \left\{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

donc $\boxed{-2 \text{ est valeur propre } (-2 \in \mathrm{Sp}(A)) \text{ et } E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left({}^{t}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left({}^{t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)}$

$\boxed{{}^{t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$ est un vecteur non nul, il forme donc une famille libre, de plus génératice de $E_{-2}(A)$ par définition du Vect, $\boxed{\text{c'est donc une base de } E_{-2}(A)}$

de même, on résout $AX = -X \Leftrightarrow (A+I)X = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = {}^{t}(x_1 \quad x_2 \quad x_3)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 2x_1 \\ x_2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow X \in \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

donc $\boxed{-1 \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left({}^{t}(1 \quad 0 \quad 2)\right)}$, de même $\boxed{{}^{t}(1 \quad 0 \quad 2) \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$

3. La matrice A est-elle inversible ? si oui, calculer A^{-1} en fonction de A^2, A et I *1,5 points*

$0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ donc A est <u>inversible</u>, de plus $(A+2I)(A+I)^2 = 0_{3,1}$ donc $(A+2I)(A^2+2A+I) = 0_{3,1}$ donc $A^3 + 2A^2 + A + 2A^2 + 4A + 2I = 0_{3,1}$ donc $A^3 + 4A^2 + 5A + 2I = 0_{3,1}$

donc $-A^3 - 4A^2 - 5A = 2I$ soit $A\left[-\frac{1}{2}\left(A^2 + 4A + 5I\right)\right] = I$ donc $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}\left(A^2 + 4A + 5I\right)}$

4. On note $u_1 = (1,0,2), u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (1,-1,2)$

a. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_3)$ *1 point*

On utilise l'écriture matricielle : $A^{t}(x_1 \quad x_2 \quad x_3) = {}^{t}(y_1 \quad y_2 \quad y_3) \Leftrightarrow f((x_1,x_2,x_3)) = (y_1,y_2,y_3)$ grâce à la question **2.**, on sait que ${}^{t}(1 \quad 0 \quad 2) \in E_{-1}(A)$ donc $A^{t}(1 \quad 0 \quad 2) = -{}^{t}(1 \quad 0 \quad 2)$ donc $f(u_1) = -u_1$ et de même ${}^{t}(1 \quad -1 \quad 2) \in E_{-2}(A)$ donc $A^{t}(1 \quad -1 \quad 2) = -2^{t}(1 \quad -1 \quad 2)$ donc $f(u_3) = -u_3$ si on n'avait pas ces résultats, on peut toujours calculer :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{f(u_1) = -u_1}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{f(u_3) = -2u_3}$$

b. Exprimer $f(u_2)$ comme combinaison linéaire de u_1 et de u_2 *1 point*

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{f(u_2) = u_1 - u_2}$$

c. Montrer que $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ *1,5 points*

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (\lambda_1, 0, 2\lambda_2) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + (\lambda_1, -\lambda_2, 2\lambda_3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \quad \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

donc $\lambda 3 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$

donc $\mathscr{U}$ est une famille libre, de plus $\mathrm{Card}(\mathscr{U}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathscr{U} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

d. Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{U}$ *1 point*

Par définition la matrice de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{U}$ correspond à la « lecture » des vecteurs de $\mathscr{U}$ dans la base $\mathscr{B}$

$$\text{donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e. Ecrire la matrice T de f relative à la base $\mathscr{U}$ *1 point*

Par définition à nouveau, cette matrice contient pour la colonne i l'image de u_i par f, dans la base $\mathscr{U}$

donc $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ car $f(u_1) = -u_1, \quad f(u_2) = u_1 - u_2$ et $f(u_3) = -2u_3$

f. Donner une relation entre T, A et P, en la justifiant soigneusement. *1 point*

Par propriété de changement de base pour une application linéaire : $M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{U}} M_{\mathscr{U}}(f) P_{\mathscr{U}\to\mathscr{B}}$

donc par définition des matrices, et car par propriété $P_{\mathscr{U}\to\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{U}}$, on trouve $\boxed{A = PTP^{-1}}$

Partie II : une application, résolution d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire : $\mathscr{S} : \begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

On posera, pour tout $t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ la matrice P étant celle obtenue dans la **partie I** question **4.d.**

On dira indifféremment que x_1, x_2, x_3 sont les inconnues du système $\mathscr{S}$ ou que X est l'inconnue du système $\mathscr{S}$

1. Montrer que X est solution du système $\mathscr{S}$ si, et seulement si Y est solution du système : *1,5 points*

$$\mathscr{S}' : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = TY(t)$$

où T est la matrice obtenue dans la **partie I** question **4.e.**.

Avec A la matrice définie à la **partie I**,

$AX(t) = \begin{pmatrix} -x_1(t) + 2x_2(t) \\ 2x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) \\ 2x_2(t) - x_3(t) \end{pmatrix}$ et on note $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$

donc X solution de $(S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, AX(t) = X'(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, PTP^{-1}X(t) = X'(t)$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, TP^{-1}X(t) = P^{-1}X'(t) \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, TY(t) = Y'(t)}$$

car P est inversible (on peut donc multiplier par P^{-1}) et $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ où $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}$

2. **a.** Justifier l'existence d'un réel λ tel que y_1 soit solution de l'équation différentielle : *3 points*

$$(E_\lambda) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = \lambda e^{-t}$$

Si Y est solution du système $\mathscr{S}'$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = TY(t) \Leftrightarrow$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(t) + y_2(t) \\ -y_2(t) \\ -2y_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) \\ y_3'(t) = -2y_3(t) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) \\ y_2(t) = \lambda e^{-t} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ y_3(t) = \mu e^{-2t} \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) + y_1(t) = \lambda e^{-t} \\ y_2(t) = \lambda e^{-t} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ y_3(t) = \mu e^{-2t} \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc si Y est solution de $\mathscr{U}$ alors $\boxed{y_1 \text{ est solution de } E_\lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre de la fonction } y_2}$

Précision : il n'était pas nécessaire d'expliciter y_3 ici.

b. Trouver une solution particulière de (E_λ) de la forme $t \mapsto a_\lambda t e^{-t}$ où a_λ est un réel à déterminer. *1 pt*

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = a_\lambda t e^{-t}$ où $a_\lambda \in \mathbb{R}$
alors $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = a_\lambda e^{-t} + a_\lambda t(-e^{-t}) = a_\lambda e^{-t} - a_\lambda t e^{-t} = a_\lambda e^{-t} - f(t)$

donc si $a_\lambda = \lambda$ alors f est solution de E_λ, i.e. $\boxed{t \mapsto \lambda t e^{-t} \text{ est solution de } E_\lambda}$

c. Résoudre (E_λ) *1 point*

Comme pour y_2, $\{t \mapsto \alpha e^{-t}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène : $y' = -y \Leftrightarrow y' + y = 0$
donc, par superposition de l'ensemble des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière,

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } E_\lambda \text{ est } \{t \mapsto \alpha e^{-t} + \lambda t e^{-t}, \alpha \in \mathbb{R}\}}$

3. Résoudre $\mathscr{S}'$ puis $\mathscr{S}$ *2,5 points*

D'après les résultats des questions **1.** et **2.c.**, Y solution de $\mathscr{S}' \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{-t} + \lambda t e^{-t}, \alpha \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R} \\ y_3(t) = \mu e^{-2t}, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

alors d'après la question **1.**, X solution de $\mathscr{S} \Leftrightarrow Y$ solution de $\mathscr{S}'$ avec $Y = P^{-1}X$

$\Leftrightarrow X = PY$ avec Y solution de $\mathscr{S}' \Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ y_2(t) - y_3(t) \\ 2y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = \alpha e^{-t} + \lambda t e^{-t} + \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t} \\ x_2(t) = \lambda e^{-t} - \mu e^{-2t} \\ x_3(t) = 2\alpha e^{-t} + 2\lambda t e^{-t} + \lambda e^{-t} + 2\mu e^{-2t} \end{cases}$ où $(\alpha, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3$

4. Justifier que toutes les composantes de X ont la même limite en $+\infty$ *1 point*

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-2t} = 0$

et par croissances comparées $\lim\limits_{t \to +\infty} t e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$ donc par opérations de limites, quelles que soient les valeurs de α, λ et μ,

$\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} x_3(t) = 0}$

5. Quel est l'unique point d'équilibre de $\mathscr{S}$? Est-il stable ? (justifier la réponse) *1 point*

X^* est un point (ou état) d'équilibre de $\mathscr{S} \Leftrightarrow AX^* = 0_{3,1}$

or A est inversible donc $\Leftrightarrow AX^* = 0_{3,1} \Leftrightarrow \boxed{X^* = 0_{3,1} \text{ c'est donc l'unique point d'équilibre de } \mathscr{S}}$

il est $\boxed{\text{stable}}$ car d'après la question **4.**, toutes les trajectoires (des solutions) convergent vers ${}^t(0, 0, 0)$ (les valeurs propres de A sont négatives mais ici A n'est pas diagonalisable donc on ne peut rigoureusement utiliser cet argument).

Exercice 2 - Edhec 2018 *32 points*

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x)=\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

1. **a.** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x *1 point*

On va utiliser la positivité de l'intégrale, en utilisant que $\forall t\in\mathbb{R}, \ln(1+t^2)\geqslant 0$ et
1er cas : si $x\geqslant 0$ (i.e. les bornes sont dans l'ordre croissant) alors, par positivité de l'intégrale,
$f(x)=\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt\geqslant 0$

2ème cas si $x\leqslant 0$, alors pour les mêmes raisons,
$\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt\geqslant 0$ donc $f(x)=\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt=-\int_x^0 \ln(1+t^2)dt\leqslant 0$

finalement, $\boxed{f \text{ est positive sur } [0,+\infty[\text{ et négative sur }]-\infty,0]}$

b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x *1 point*

D'après le théorème fondamental de l'intégration, f est une primitive de $t\mapsto\ln(1+t^2)$, donc f est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\ln(1+x^2)$
or, $t\mapsto\ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, en tant que composition de fonctions continues (ln et un polynôme)

donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\ln(1+x^2)}$

c. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f). *1 point*

$\forall x\in\mathbb{R}, x^2\geqslant 0$ donc $1+x^2\geqslant 1$ et donc par croissance du logarithme $\ln(1+x^2)\geqslant\ln(1)$ i.e. $f'(x)\geqslant 0$

ainsi, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

2. **a.** Montrer que f est impaire. *1,5 points*

f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour $x\in\mathbb{R}, f(-x)=\displaystyle\int_0^{-x}\ln(1+t^2)dt$
on fait alors le changement de variable $u=-t$, $du=-dt$ et on obtient :
$f(-x)=\displaystyle\int_0^x \ln(1+(-u)^2)(-du)=-\int_0^x \ln(1+u^2)du=-f(x)$ ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

b. Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. *1,5 points*

$t\mapsto\ln(1+t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$
comme le dénominateur est toujours positif, $f''(x)$ est du signe de x et donc $\forall x\in\mathbb{R}_-, f''(x)\leqslant 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+, f''(x)\geqslant 0$ et $f''(x)$ s'annule en 0 en changeant de signe

donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty;0] \text{ et convexe sur } [0;+\infty[\text{ et elle admet un point d'inflexion}}$ au point d'abscisse 0, i.e. $\boxed{\text{le point } (0,0)}$, car $f(0)=\displaystyle\int_0^0 \ln(1+t^2)dt=0$

3. **a.** Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t\in\mathbb{R},\quad \dfrac{t^2}{1+t^2}=a+\dfrac{b}{1+t^2}$ *1,5 points*

Soit a et b deux réels tels que : $\forall t\in\mathbb{R},\quad \dfrac{t^2}{1+t^2}=a+\dfrac{b}{1+t^2}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}, \dfrac{t^2}{1+t^2}=\dfrac{at^2+(a+b)}{1+t^2}$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, t^2 = at^2 + a + b$ (car $1+t^2 \neq 0$)

ainsi, par identification, on doit avoir : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}}$

Nota bene : le raisonnement par équivalence n'est pas nécessaire pour trouver que $a = 1$ et $b = -1$ fonctionne mais il l'est pour montrer que c'est l'unique solution, ce qui semble être demandé par l'énoncé.

b. En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a : *2 points*

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$, on pose alors :

$u'(t) = 1$ et $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$ et donc $v'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

$f(x) = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt.$

or d'après la question précédente,

$\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^x 1 - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

Ainsi, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right)$ soit $\boxed{f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente. *1,5 points*

$\dfrac{1}{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{1+t^2}$ car $\dfrac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \dfrac{t^2+1}{t^2} = 1 + \dfrac{1}{t^2} \underset{+\infty}{\to} 1$

de plus $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives sur $[1; +\infty[$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha > 1$) donc, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente

donc, par relation de Chasles, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est convergente}}$

b. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$ *2 points*

Nous avons démontré à la question **3.b.** que $f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

donc pour $x > 0$, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x\ln(1+x^2)\left(1 - \frac{2x}{x\ln(1+x^2)} + \frac{a(x)}{x\ln(1+x^2)}\right)$

où $a(x) = 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ et donc $\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1 - \dfrac{2}{\ln(1+x^2)} + \dfrac{a(x)}{x\ln(1+x^2)}$

or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t^2}dt$ est un nombre fini et par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+x^2) = +\infty$

donc par quotients de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{\ln(1+x^2)} + \frac{a(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1 - 0 + 0 = 1$

soit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1$ i.e. $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)}$

c. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$ *2 points*

Soit $x > 0$, alors $2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(1+x^2)$

or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{=} o(2\ln(x))$

donc $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{=} 2\ln(x) + o(2\ln(x))$ donc par propriété $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$

donc par produit d'équivalents $x\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$

or $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$ donc $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)}$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\ln\left(1+x^2\right)} \times \frac{x\ln\left(1+x^2\right)}{2x\ln(x)} = 1 \times 1 = 1$ d'après les équivalents

d. Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$ *1 point*

Comme f est impaire, on comprend que l'équivalent en $-\infty$ sera l'opposé de l'équivalent précédent mais on doit le modifier car il n'est pas défini pour $x \leqslant 0$, on utilise $2\ln(x) = \ln(x^2)$ et alors $\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} x\ln(x^2)}$ que l'on pourrait aussi écrire $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(|x|)$ (on a bien l'opposé car $x < 0$)

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0

a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ *1 point*

Pour les mêmes raisons que plus haut f' est une composée de fonctions $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) donc f' est $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) et donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^3}$ (et même $\mathscr{C}^\infty$)

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

b. Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ *1 point*

$f(0) = \int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$ et d'après les calculs précédents, pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \ln(1+x^2)$ et $f''(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ donc $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$

enfin $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2}$ donc $\boxed{f^{(3)}(0) = 2 \text{ et } f(0) = f'(0) = f''(0) = 0}$

c. En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 *1 point*

L'énoncé original était généreux sur cette question !
Ainsi, d'après la formule proposée (de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0) :

$f(x) \underset{0}{=} \frac{x^3}{3!} \times 2 + o(x^3) \underset{0}{=} \frac{2x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc par propriété $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}}$

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$

1. a. La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ? *0,5 point*

Si on considère l'expression générale de u_n, $\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt = \int_0^1 1dt = 1 = u_0$ ce qui est donc cohérent avec la valeur de u_0 donnée et on utilisera donc la formule avec l'intégrale pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la suite.

b. Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f *0,5 point*

Par définition, $u_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ donc $\boxed{u_1 = f(1)}$ par définition de f

2. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *2 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, alors $0 \leqslant t \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant t^2 \leqslant 1$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ donc $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2 \leqslant e$ et donc $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$ par croissance de ln donc $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$ et donc en multipliant l'inégalité précédente par $\left(\ln(1+t^2)\right)^n$ on trouve $\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \leqslant \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ et donc par croissance de l'intégrale (car $0 \leqslant 1$) :
$\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt \leqslant \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$

i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge. *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme vu à la question précédente $\forall t \in [0;1], \left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \geqslant 0$ i.e. $u_n \geqslant 0$ et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0}$

finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0

donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

3. **a.** Etablir l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ *1,5 points*

On a montré à la question **2.a.** que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$
donc $\ln(1+t^2)^n \leqslant (\ln(2))^n$ par croissance des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+$
donc par croissance de l'intégrale $(0 \leqslant 1)$:
$\int_0^1 \ln(1+t^2)^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln(2))^n dt$ i.e. $u_n \leqslant (\ln(2))^n$ par définition de u_n et car
$\int_0^1 (\ln(2))^n dt = (\ln(2))^n (1-0) = (\ln(2))^n$ (puisque $(\ln(2))^n$ ne dépend pas de t)

de plus $u_n \geqslant 0$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n}$

b. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ? *2 points*

Comme vu plus haut $1 < 2 < e \Rightarrow 0 \leqslant \ln(2) < 1$ par stricte croissance de ln
donc $(\ln(2))^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| = \ln(2) < 1$)
donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $u_n \to 0$
de plus la série de terme général $(\ln(2))^n$ converge car il s'agit d'une série géométrique avec $|q| < 1$
donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs $(u_n \geqslant 0)$,

$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n \Rightarrow$ $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}}$

4. **a.** Montrer que : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ *2 points*

On comprend qu'il faut travailler sur le dénominateur :
comme vu précédemment, pour $t \in [0;1], \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) < 1 \Rightarrow 0 < 1-\ln(2) \leqslant 1-\ln(1+t^2)$
donc en applicant la fonction inverse, décroissante sur $]0,+\infty[$,
$0 \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)}$ car $(\ln(1+t^2))^n \geqslant 0$ donc par croissance et positivité de l'intégrale $(0 < 1)$: $0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} dt$ et enfin par linéarité ($\frac{1}{1-\ln(2)}$ ne dépend pas de t), $\int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} dt = \frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt = \frac{u_n}{1-\ln(2)}$

d'où $\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}}$

b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$ *0,5 point*

D'après la question précédente,

$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc par opération $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1-\ln 2} = 0$

et donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = 0}$

c. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$ *1,5 points*

Soit n un entier naturel non nul, alors :

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt = \int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k\right) dt$ par linéarité de l'intégrale

donc, par somme des termes d'une suite géométrique, $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt}$

d. En déduire que l'on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt$ *1,5 points*

Ainsi,

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$ par linéarité

or d'après la question **4.b.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt$ (car cette dernière expression ne dépend pas de n)

soit $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt}$

Exercice 3 - Ecricome 2022 *34 points*

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \ldots$

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a. Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres. *1 point*

En interprétant comme succès « le jeton est placé dans l'urne 1 » (respectivement dans l'urne 2, dans l'urne 3) dont la probabilité est égale à $\frac{1}{3}$, alors X_n (respectivement Y_n, Z_n) détermine le nombre le succès à l'issue de la réalisation des n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli.

On peut donc conclure que $\boxed{X_n,\ Y_n \text{ et } Z_n \text{ suivent toutes trois la loi binomiale } \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)}$

b. Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$ *0,5 point*

D'après le cours, $P(X_n = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $P(X_n = n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c. Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$ *0,5 point*

$[(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)]$ signifie qu'après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun : on a donc placé tous les jetons (au nombre de n) dans l'urne 1, c'est-à-dire que $(X_n = n)$

On a bien l'égalité voulue $\boxed{(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)}$

Nota bene : on peut aussi raisonner à l'aide de $X_n + Y_n + Z_n = n$ (et $X_n, Y_n, Z_n \geqslant 0$)

d. Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$ *0,5 point*

La définition littérale de V_n est synonyme de « $X_n = 0$ ou $Y_n = 0$ ou $Z_n = 0$ » ce qui s'écrit : $\boxed{V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)}$

e. En déduire que : $P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ *2 points*

Il s'agit ici d'appliquer à l'égalité précédente, la formule du crible, avec trois événements (cf. plus bas) :
$P(V_n) = P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - P([Z_n = 0] \cap [X_n = 0]) + P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0])$
or, les trois urnes ne peuvent pas être simultanément vides après avoir placé n jetons donc
$P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) = 0$
et par ce qui précède (en reproduisant le raisonnement car les rôles de X_n, Y_n et Z_n sont symétriques) :
$P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) = P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) = P([Z_n = 0] \cap [X_n = 0]) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d'où $\boxed{P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ comme demandé

Remarque : nous n'avons pas abordé cette formule du crible en cours. Pour la démontrer, on utilise la formule du crible avec deux événements :

$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))$
or $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cup C)$ d'après la formule du crible encore
et $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap B)$ donc à nouveau avec la formule :
$P(A\cap(B\cup C))=P(A\cap B)+P(A\cap B)-P((A\cap B)\cap(B\cap C)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$
car $(A\cap B)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$
donc en injectant dans la première égalité :
$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cup C)-(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C))$

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cup C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ». *2 points*
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $P(V)=0$

On peut écrire $V=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}V_n$ car pour qu'au moins une des urnes reste vide, il faut qu'elle reste vide à l'issue du premier tour, du deuxième tour, et du $n^{\text{ème}}$ tour pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (il s'agit donc d'un « et » d'où l'intersection).
donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, V\subset V_n$ (car $A\subset A\cap B$)
donc $P(V)\leqslant P(V_n)$ donc $0\leqslant P(V)\leqslant 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et ce $\forall n\in\mathbb{N}^*$
donc en faisant tendre n vers $+\infty$, puisque $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$ (forme q^n avec $|q|<1$)
donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}P(V)=\boxed{P(V)=0}$

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a. On rappelle qu'en *Python* la commande `rd.randint(a,b+1)` renvoie un nombre aléatoire qui est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a,b]\!]$
Compléter la fonction *Python* ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T *1 point*

```
def T():
  X = 0 ,  Y = 0 ,  Z = 0 ,  n = 0
  liste = np.array([X,Y,Z])
  while --------:
    i = rd.randint(1,4)  # choix d'un entier entre 1 et 3
    liste[i-1] = liste[i-1] + 1 # l'urne i reçoit un jeton de plus
    n=n+1
  t=----
  return t
```

Pour compléter ce programme : on va continuer à ajouter des jetons *tant qu*'il y a au moins un zéro dans la liste correspondant au nombre de jetons par urne, d'où `while 0 in liste` (on peut aussi faire avec des « ou » : `while liste[0]==0 or ... :` ou encore avec un produit `while liste[0]*liste[1]*liste[2]==0`
Il faut enfin utiliser le compteur de tours, comme l'incrémentation s'arrête au moment où un jeton a été placé dans la dernière urne restée vide, il faut renvoyer `n` donc `t=n`.

b. Ecrire un script Python qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe). *1,5 points*

On peut obtenir une valeur approchée de l'espérance d'une variable (quand celle-ci existe) à l'aide de la moyenne empirique d'un $n-$échantillon de cette variable, avec n aussi grand que possible. Ici, le sujet propose $n=10000$. On stocke donc 10000 réalisations de la variable T simulée avec la fonction ci-avant et on en fait la moyenne.

```
est=np.mean([T() for  k in range(10000)])
print(est)
```

4. Déterminer $T(\Omega)$ *0,5 point*

Il faut au moins placer 3 jetons si on veut espérer remplir les 3 urnes, mais on peut atteindre n'importe quel rang $k \geqslant 3$, en remplissant uniquement les deux premières urnes, jusqu'au $k^{\text{ème}}$ tirage où on place un jeton dans la troisième. On a donc clairement $\boxed{T(\Omega) = [\![3; +\infty[\![}$

5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$ *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, observons que $[T = n] \cup V_n = V_{n-1}$
En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) pour le placement suivant (du $n^{\text{ème}}$ jeton) : ou bien il reste encore au moins une urne vide (c'est-à-dire V_n) ou bien, on remplit toutes les urnes pour la première fois avec le $n^{\text{ème}}$ jeton (c'est-à-dire $[T = n]$)
l'incompatibilité donne bien $P(T = n) + P(V_n) = P(V_{n-1})$ et donc $\boxed{P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)}$

<u>Option B</u> : on peut aussi écrire $[T = n] = V_{n-1} \cap \bar{V_n}$
donc par définition des probabilités conditionnelles (pour des événements possibles)
$P(T = N) = P(V_{n-1})P_{V_{n-1}}(\bar{V_n}) = P(V_{n-1})(1 - P_{V_{n-1}}(V_n) = P(V_{n-1}) - P(V_{n-1})P_{V_{n-1}}(V_n)$
$= P(V_{n-1}) - P(V_{n-1} \cap V_n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$ car $V_{n-1} \cap V_n = V_n$

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance. *3 points*

On doit commencer par expliciter la loi de T. D'après les questions précédentes, on a, pour $n \geqslant 3$,

$$P(T = n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

alors par définition, T admet une espérance si :

$$\sum_{n \geqslant 3} nP(T = n) = \sum_{n \geqslant 3} n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \text{ converge (absolument)}$$

or $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = \sum_{n \geqslant 3} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n \geqslant 3} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (de raisons respectives 2/3 et 1/3)
donc T admet une espérance et

$$E(T) = \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1 - \frac{4}{3} - \left(2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$E(T) = \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} - 1 - \frac{2}{3}\right) = 9 - 1 - \frac{4}{3} - 2 \times \frac{9}{4} + 2 + \frac{4}{3} \text{ donc } \boxed{E(T) = \frac{11}{2}}$$

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. a. Donner la loi du couple (X_2, W_2) *3 points*

Commençons par observer qu'après avoir placé 2 jetons on a entre 1 et 2 urnes vides,
donc $W_2(\Omega) = \{1; 2\}$
On introduit aussi N_i la variable qui renvoie le numéro de l'urne dans laquelle on place le jeton i. D'après les hypothèses, les variables N_i sont indépendantes et suivent toutes des lois uniformes sur $[\![1; 3]\!]$
$P(X_2 = 0 \cap W_2 = 1) = P([N_1 = 2 \cap N_2 = 3] \cup [N_1 = 3 \cap N_2 = 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
$P(X_2 = 0 \cap W_2 = 2) = P([N_1 = 2 \cap N_2 = 2] \cup [N_1 = 3 \cap N_2 = 3]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
$P(X_2 = 1 \cap W_2 = 1) = P([N_1 = 1 \cap N_2 = 2] \cup [N_1 = 1 \cap N_2 = 3] \cup [N_1 = 2 \cap N_2 = 1] \cup [N_1 = 3 \cap N_2 = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

$P(X_2 = 1 \cap W_2 = 2) = 0$ (un jeton dans l'urne 1 et deux urnes vides, c'est impossible)
$P(X_2 = 2 \cap W_2 = 1) = 0$ (deux jetons dans l'urne 1 et une urne vide, c'est impossible)
$P(X_2 = 2 \cap W_2 = 2) = P([N_1 = 1 \cap N_2 = 1]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$
Ce qui donne le tableau :

$X_2 \backslash W_2$	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

b. En déduire la loi de W_2 et calculer son espérance. *1,5 points*

On en déduit, en sommant les termes de chaque colonne (formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_2 = i] : i \in [\![0;2]\!]\}$), la loi de W_2 :

j	1	2
$P(W_2 = j)$	2/3	1/3

donc $\boxed{E(W_2) = 1 \times \dfrac{2}{3} + 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}}$

c. Calculer la covariance de X_2 et W_2 *1,5 points*

La covariance de W_2 et X_2 se calcule avec la formule $\operatorname{cov}(X_2, W_2) = E(X_2 W_2) - E(X_2)E(W_2)$
le tableau de la loi conjointe donne $E(X_2 W_2) = 1 \times \dfrac{4}{9} + 4 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$
par ailleurs $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$ donc $E(X_2) = \dfrac{2}{3}$ et d'après la question précédente, on a $E(W_2) = \dfrac{4}{3}$

donc on trouve finalement $\boxed{\operatorname{cov}(X_2, W_2) = \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{3} = 0}$

d. Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ? *1 point*

$\boxed{X_2 \text{ et } W_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car $P(X_2 = 1 \cap W_2 = 2) = 0 \neq P(X_2 = 1)P(W_2 = 2)$

Nota bene : il s'agit d'un cas où la covariance des deux variables est nulle, mais pour autant les variables ne sont indépendantes. Par ailleurs, quand un zéro apparait dans le tableau de la loi de couple, les variables ne sont pas indépendantes.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3

8. Déterminer $W_n(\Omega)$ *1 point*

Comme $n \geqslant 3$, on place au moins 3 jetons. On peut avoir placé tous les jetons dans la même urne (auquel cas $W_n = 2$), ou dans deux urnes différentes (auquel cas $W_n = 1$) ou dans les trois (ce qui donne $W_n = 0$).

On a donc $\boxed{W_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]}$

9. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

a. Montrer que : $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $E(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ *1 point*

$W_{n,i}$ est une variable de Bernoulli, son espérance est donc égale à son paramètre. L'urne 1 (resp. 2, 3) est vide si $X_n = 0$ (resp. $Y_n = 0$, $Z_n = 0$)
ces trois événements ont la même probabilité on a, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$

$\boxed{E(W_{n,i})} = P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0) \boxed{= \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

b. Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ *1 point*

Par définitinon de W_n qui est le « compteur » d'urnes vides et des $W_{n,i}$ qui vaut 1 si l'urne i est vide, $\boxed{W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}}$

c. Exprimer alors $E(W_n)$ en fonction de n *1 point*

Par linéarité de l'espérance, et puisque les $W_{n,i}$ suivent des lois de Bernoulli,

on a donc $\boxed{E(W_n)} = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = \boxed{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

10. Démontrer que : $P\Big((X_n = n) \cap (W_n = 2)\Big) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *1,5 points*

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $P\Big((X_n = k) \cap (W_n = 2)\Big)$?

Comme $[X_n = n] = [X_n = n] \cap [W_n = 2]$, on a $\boxed{P([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

d'autre part, si $W_n = 2$ alors tous les jetons sont placés dans la même urne et il n'est pas possible d'avoir ; chaque urne contient donc 0 ou n jetons et donc $\boxed{P([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = 0}$, $k \in [\![1, n-1]\!]$

11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big) = \dfrac{2\binom{n}{k}}{3^n}$ *2 points*

Que vaut $P\Big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\Big)$?

On s'intéresse à l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$
cet événement signifie qu'on a placé k des n jetons dans l'urne 1 et les $n-k$ jetons restants dans une (et même) autre urne.

Par exemple, si la deuxième urne à recevoir des jetons est l'urne 2, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k jetons parmi les n que l'on va mettre dans l'urne 1, les autres étant automatiquement placés dans l'urne 2. Pour chacune de ces possibilités, la probabilité est $(1/3)^n$
il en va de même si la deuxkième urne à recevoir des jetons est l'urne 3

donc $\boxed{P([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = 2 \times \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

par ailleurs, si $[X_n = n]$ tous les jetons sont placés dans la même urne et il y en a deux qui restent vides ; ainsi

$\boxed{P(X_n = n \cap W_n = 1) = 0}$

12. Démontrer que : $E(X_n W_n) = 2nP\Big((X_n = n) \cap (W_n = 2)\Big) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kP\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big)$ *2 points*

D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
E(X_n W_n) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{2} kiP(X_n = k \cap W_n = i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} kiP(X_n = k \cap W_n = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k \cap W_n = 1) + \sum_{k=1}^{n-1} 2kP(X_n = k \cap W_n = 2) + 2nP(X_n = n \cap W_n = 2) \\
&= 2nP(X_n = n \cap W_n = 2) + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1)
\end{aligned}$$

$\boxed{E(X_n W_n) = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1)}$ d'où le résultat d'après la question **10.**

13. Montrer alors que $E\left(X_nW_n\right) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, puis calculer la covariance de X_n et W_n *3 points*

On poursuit le calcul en ajoutant le résultat obtenu plus haut. On va aussi utiliser la formule classique mais hors programme (on peut la démontrer avec la formule des coefficients binomiaux) : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1)\\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{n-1} \qquad \text{(formule du binôme)}
\end{aligned}$$

$E(X_nW_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ comme demandé.

on calcule ensuite la covariance avec la même formule que plus haut, comme $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$

on a $E\left(X_n\right) = \dfrac{n}{3}$ d'où $\boxed{\operatorname{cov}(X_n, W_n)} = E(X_nW_n) - E\left(X_n\right)E(W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{n}{3}\times 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \boxed{= 0}$

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente. *0,5 point*

La covariance précédente est nulle, pourtant (tout comme précédemment pour $n = 2$) les variables X_n et W_n ne sont pas indépendantes fournissant un nouveau contre-exemple à la réciproque du résultat du cours affirmant que si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.