ECG 2 - mathématiques appliquées **Devoir en temps libre n°5** Pour le 8 janvier 2026

Corrigé *Total sur 20 points*

Exercice 1 - exercice 20 de la feuille de T.D. n°8

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme représenté par A relativement à la base canonique $\mathscr{B}$

On pose $u = (2, 1, -2)$

1. **a.** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ *2 points*

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $f((x, y, z)) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = 0_{3,1}$ où $X = {}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

or $AX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 10 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 7 & 0 \\ -2 & -8 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \Leftrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_2 - 3(-2x_2) = 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow X \in \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(u)$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)}$

b. La matrice A est-elle inversible ? *0,5 point*

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f n'est pas injective, donc f n'est pas bijective

donc $\boxed{A = M_{\mathscr{B}}(f) \text{ n'est pas inversible.}}$

2. **a.** Déterminer le vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et tel que $f(v) = u$

On pose $v = (a, 1, b)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $f(v) = u \Leftrightarrow A\,{}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} a & 1 & b \end{pmatrix} = {}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 10 - 7b & = & 2 \\ a + 4 + 3b & = & 1 \\ -2a - 8 - 6b & = & -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4 + 3b & = & 1 \\ 2a + 10 - 7b & = & 2 \\ -2a - 8 - 6b & = & -2 \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \Leftrightarrow$ *1,5 points*

$\begin{cases} a + 4 + 3b & = & 1 \\ 2 + b & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 - 3b = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

donc $\boxed{v = (3, 1, -2)}$ est l'unique solution

b. Déterminer le vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et tel que $f(w) = v$ *1 point*

Même méthode et mêmes opérations sur les lignes (attention le second membre est différent) :

on trouve $f((a,1,b)) = v \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+4+3b & = & 1 \\ 2+b & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a = -3-3b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right.$

donc $\boxed{w = (0,1,-1)}$ est l'unique solution

3. **a.** Montrer que $\mathscr{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ *1,5 points*

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 & \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 & \\ \lambda_3 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda_2 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2 \\ \lambda_1 = 0 & \\ \lambda_3 = 0 & \end{array}\right.$$

donc la famille $\mathscr{B}'$ est libre et $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

b. Ecrire la matrice N de f relative à la base $\mathscr{B}'$ *0,5 point*

D'après les questions précédentes, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}, f(v) = u$ et $f(w) = v$,

donc par définition, $\boxed{N = M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Nota bene : on aura remarqué le N comme Nathalie ! ou plutôt, nilpotente !

c. Ecrire la matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ *1 point*
Donner une relation entre N, P, et A

Par définition, P contient « en colonnes » les vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$

donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

et d'après la formule de changement de base d'une application linéaire,

$M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ $\boxed{\text{soit } A = PNP^{-1}}$ car $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P^{-1}$

d. Calculer N^2, N^3. En déduire que : $A^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geqslant 3$ *1,5 points*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit $\boxed{N^3 = 0_3}$

donc $A^3 = (PNP^{-1})^3 = PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1} = PNI_3NI_3NP^{-1} = PN^3P^{-1} = 0_3$

car $N^3 = 0_3$ et donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 3, A^k =} A^{k-3}A^3 \boxed{= 0_3}$ car $A^3 = 0_3$

Nota bene : on peut montrer que $N^n = 0_3$ pour $n \geqslant 3$ puis établir $A^n = PN^nP^{-1}$ (par récurrence) mais ce n'est pas indispensable ici.

4. **a.** Montrer que A ne possède qu'une seule valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé. *1,5 points*

D'après la question précédente $A^3 = 0_3$ donc $x \mapsto x^3$ est un polynôme annulateur de A, et admet 0 pour unique racine, donc 0 est la seule valeur possible
de plus pour $X = {}^{\mathbf{t}}(x \quad y \quad z), AX = 0_{3,1} \Leftrightarrow f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$
$\Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(u)$ d'après la question **1.a.** donc $AX = 0_{3,1} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}({}^{\mathbf{t}}(2 \quad 1 \quad -2))$

donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre et } E_0(A) = \mathrm{Vect}({}^{\mathbf{t}}(2 \quad 1 \quad -2))}$

b. Montrer que, pour tout réel λ non nul, $f - \lambda id_3$ est un automorphisme, id_3 étant l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ (*un automorphisme est un endomorphisme bijectif*) . *1,5 points*

D'après la caractérisation des isomorphismes, $f - \lambda id_3$ est un automorphisme (i.e. un endomorphisme bijectif) $\Leftrightarrow M_{\mathscr{B}}(f - \lambda id_3)$ est inversible
or $M_{\mathscr{B}}(f - \lambda id_3) = M_{\mathscr{B}}(f) - \lambda M_{\mathscr{B}}(id_3) = A - \lambda I_3$
or A n'admet que 0 pour valeur propre, donc $\forall \lambda \neq 0, A - \lambda I_3$ est inversible (car alors λ n'est pas valeur propre)

et donc $\boxed{\forall \lambda \neq 0, f - \lambda id_3 \text{ est un automorphisme}}$

5. On note $g = f - id_3$

a. Ecrire la matrice B de g relative à la base canonique. *1,5 points*
Ecrire la matrice M de g relative à la base $\mathscr{B}'$
Donner une relation entre B, M, P

Comme à la question précédente,

$\boxed{B =} M_{\mathscr{B}}(g) = M_{\mathscr{B}}(f - id_3) = M_{\mathscr{B}}(f) - M_{\mathscr{B}}(id_3) \boxed{= A - I_3}$ puis de même,

$\boxed{M =} M_{\mathscr{B}'}(g) = M_{\mathscr{B}'}(f - id_3) = M_{\mathscr{B}'}(f) - M_{\mathscr{B}'}(id_3) \boxed{= N - I_3}$ car $M_{\mathscr{B}'}(f) = N$

donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et d'après la formule de changement de base d'une application linéaire,

$M_{\mathscr{B}}(g) = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} M_{\mathscr{B}'}(g) P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}$ $\boxed{\text{soit } M = PBP^{-1}}$ d'après ce qui précède.

b. Montrer que B est inversible et expliciter B^{-1} *2 points*

D'après la question **4.b.**, $g - id_3$ est un automorphisme et $A - I_3$ est inversible, i.e.
$\boxed{B \text{ est inversible}}$ car $B = A - I_3$ d'après la question précédente

déterminons alors B^{-1}, on peut le faire de manière classique avec le pivot de Gauss, mais aussi réaliser que $A^3 = 0_3$ i.e. $(B + I_3)^3 = 0_3$
donc en développant $(B+I_3)(B+I_3)^2 = (B+I_3)(B^2+2B+I_3) = B^3+3B^2+3B+I_3 = 0_3$
donc $B(-B^2 - 3B - 3I_3) = I_3$ donc (B est inversible) et $B^{-1} = -B^2 - 3B - 3I_3$
on nous demande de l'expliciter :

$$B^2=\begin{pmatrix}1&10&7\\1&3&3\\-2&-8&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&10&7\\1&3&3\\-2&-8&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-16&-12\\-2&-5&-5\\4&12&11\end{pmatrix}$$

$$\text{donc } B^{-1}=-\begin{pmatrix}-3&-16&-12\\-2&-5&-5\\4&12&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&30&21\\3&9&9\\-6&-24&-21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-14&-9\\-1&-7&-4\\2&12&7\end{pmatrix}$$

c. Montrer qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : *1,5 points*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad M^n=a_nI_3+b_nN+c_nN^2$$

Par récurrence, pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P(n):\exists(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3, M^n=a_nI_3+b_nN+c_nN^2$

Initialisation : $P(0)$ vraie $\Leftrightarrow M^0$ est combinaison linéaire de I_3, N et N^2
ce qui est vrai car $M^0=I_3=1\times I_3+0\times N+0\times N^2$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie
alors par hypothèse, $\exists(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3, M^n=a_nI_3+b_nN+c_nN^2$
et donc $M^{n+1}=M^nM=(a_nI_3+b_nN+c_nN^2)M=(a_nI_3+b_nN+c_nN^2)(N-I_3)$
donc $M^{n+1}=a_nN+b_nN^2+c_nN^3-a_nI_3-b_nN-c_nN^2=-a_nI_3+(a_n-b_n)N+(b_n-c_n)N^2$
car $N^3=0^3$
donc M^{n+1} est bien combinaison linéaire de I_3, N et N^2 donc $P(n+1)$ est vraie,
d'où l'hérédité, donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\exists(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3, M^n=a_nI_3+b_nN+c_nN^2}$$

d. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad B^n=a_nI_3+b_nA+c_nA^2$ *2,5 points*

On va d'abord établir la formule classique par récurrence : $M^n=PB^nP^{-1}$
$n\in\mathbb{N}$, on pose $Q(n):M^n=PB^nP^{-1}$

Initialisation : $Q(0)$ vraie $\Leftrightarrow M^0=PB^0P^{-1}\Leftrightarrow I_3=PI_3P^{-1}=PP^{-1}\Leftrightarrow I_3=I_3$
ce qui est vrai donc $Q(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose $Q(n)$ vraie
alors par hypothèse, $M^n=PB^nP^{-1}$ et donc $M^{n+1}=M^nM=PB^nP^{-1}PBP^{-1}$
car $M=PBP^{-1}$, donc $M^{n+1}=PB^nI_3BP^{-1}=PB^nBP^{-1}=PB^{n+1}P^{-1}$
donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité,

donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$ est vraie i.e. $\boxed{M^n=PB^nP^{-1}}$

or d'après la question précédente pour $n\in\mathbb{N}, M^n=a_nI_3+b_nN+c_nN^2$
soit $PB^nP^{-1}=a_nI_3+b_nN+c_nN^2$
donc $P^{-1}PB^nP^{-1}=P^{-1}(a_nI_3+b_nN+c_nN^2)$ soit $B^nP^{-1}=a_nP^{-1}+b_nP^{-1}N+c_nP^{-1}N^2$
puis $B^nP^{-1}P=(a_nP^{-1}+b_nP^{-1}N+c_nP^{-1}N^2)P$
soit $B^n=a_nP^{-1}P+b_nP^{-1}NP+c_nP^{-1}N^2P$
or $P^{-1}P=I_3,\qquad A=P^{-1}NP$ et $A^2=P^{-1}NPP^{-1}NP=PN^2P^{-1}$
d'où $\boxed{B^n=a_nI_3+b_nA+c_nA^2 \text{ et ce } \forall n\in\mathbb{N}}$

e. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B^n\in\text{Vect}(I_3,B,B^2)$ *1 point*

Nous venons de montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, B^n=a_nI_3+b_nA+c_nA^2$ or $B=A+I_3$
donc $\forall n\in\mathbb{N}, B^n=a_nI_3+b_n(B+I_3)+c_n(B+I_3)^2=a_nI_3+b_nB+b_nI_3+c_n(B^2+2B+I_3)$
donc $B^n=(a_n+b_n+c_n)I_3+(b_n+2c_n)B+c_nB^2$ et donc $\boxed{B^n\in\text{Vect}(I_3,B,B^2)}$ (i.e. B^n
est combinaison linéaire de I_3, B et B^2