

## Chapitre 11 - graphes probabilistes - chaines de Markov

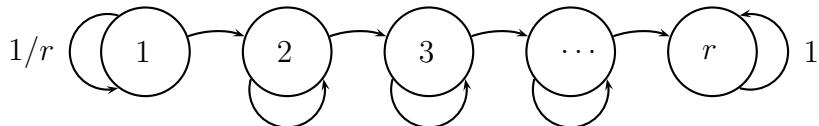
### Exercice 1 - le problème du collectionneur

Le titre de l'exercice vient d'une situation concrète : un collectionneur de cartes à jouer (ou de timbres, etc.) achète des paquets de cartes. Dans chaque paquet, il y a une carte « rare » et d'autres communes. On suppose qu'il y a  $r$  cartes rares en tout et que la probabilité d'obtenir une carte rare donnée dans un paquet est égale à  $\frac{1}{r}$  (équiprobabilité). On s'intéresse au moment où le collectionneur obtient la collection complète des cartes rares.

Le problème peut être modélisé ainsi : une urne contient  $r$  boules numérotées de 1 à  $r$ . On effectue des tirages avec remise d'une boule et on note son numéro. On note  $X_n$  le nombre de numéros différents obtenus lors des  $n$  premiers lancers.

On pourra s'appuyer sur les exemples  $r = 3$  ou  $r = 4$

- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = i) = \frac{i}{r}$
- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = i+1) = 1 - \frac{i}{r}$
- Compléter le graphe probabiliste suivant schématisant les résultats précédents (de l'état  $n$  à l'état  $n+1$ ) :



Dans le cas  $r = 4$ , on note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$

- Déterminer la matrice  $M$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$

- Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  Vérifier que  $M = P D P^{-1}$  où  $D = \frac{1}{4} \text{Diag}(1, 2, 3, 4)$  (matrice diagonale).

- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = U_1 M^{n-1}$
- Montrer que : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^{n-1} = P D^{n-1} P^{-1}$
- Calculer  $P^{-1}$  puis en déduire  $U_n$  en fonction de  $n$  (loi de  $X_n$ )
- Déterminer les limites des composantes de  $U_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

## Exercice 2 - tirages dans une urne

Une urne contient initialement  $r$  boules rouges et  $m - r$  boules blanches, où  $m$  et  $r$  sont des entiers naturels vérifiant  $0 \leq r \leq m$  et  $m \geq 2$

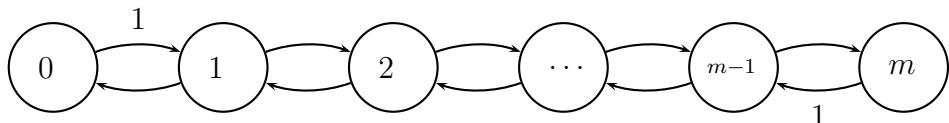
On effectue une série de tirages ; à chaque tirage, la boule tirée est écartée et on remet dans l'urne une boule de la couleur opposée (blanche si la boule tirée est rouge et inversement).

On s'intéresse au nombre  $X_n$  de boules rouges dans l'urne à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  tirage, avec  $X_0 = r$

On posera, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  le vecteur ligne (loi de  $X_n$ ) :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & \dots & P(X_n = m) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{m}P(X_n = 1)$  et  $P(X_{n+1} = m) = \frac{1}{m}P(X_n = m-1)$
2. Compléter le graphe probabiliste suivant schématisant l'évolution de l'état  $n$  à l'état  $n+1$  :



3. Montrer que, pour  $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$P(X_{n+1} = i) = \frac{m-i+1}{m}P(X_n = i-1) + \frac{i+1}{m}P(X_n = i+1)$$

Dans la suite, on suppose que  $m = 2$  et  $r = 1$

4. Déterminer la matrice de transition associée à la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$
5. a. Montrer que les valeurs propres de  $M$  sont  $-1, 0$  et  $1$   
Pour  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , on déterminera un vecteur colonne  $C_\lambda$  de première coordonnée égale à 1 et générateur du sous-espace propre  $E_\lambda$  associé à la valeur propre  $\lambda$
- b. On définit une matrice carrée  $P$  par ses colonnes : dans l'ordre égales à  $C_{-1}, C_0$  et  $C_1$   
Justifier que  $P$  est une matrice inversible.
- c. Trouver une matrice diagonale  $D$  telle que  $MP = PD$  et en déduire que  $M$  est diagonalisable.
6. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = U_n P$ . Donner une relation entre  $V_{n+1}$ ,  $V_n$  et  $D$
7. Montrer que les composantes de  $U_n$  n'ont pas de limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$
8. Montrer que la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une loi de probabilité invariante, c'est-à-dire un vecteur ligne  $U$  définissant une loi de probabilité et vérifiant  $U = UM$

## Exercice 3

On considère la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $X_0 = 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

- la loi de  $X_{n+1}$  sachant  $[X_n = 0]$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$
- la loi de  $X_{n+1}$  sachant  $[X_n = 1]$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{3}{4}$

1. Justifier que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$

Montrer que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov homogène et déterminer la matrice de transition  $M$  ainsi que son graphe probabiliste associé.

2. Déterminer les valeurs propres de  $M$  et les sous-espaces propres associés.
3. Déterminer une matrice  $P$  inversible de deuxième ligne  $(1 \ 1)$  et une matrice  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  diagonale avec  $\lambda_1 < \lambda_2$  telles que  $M = PDP^{-1}$
4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$  et calculer explicitement  $M^n$  (on calculera  $P^{-1}$ )
5. On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = (P(X_n = 0) \ P(X_n = 1))$

- Justifier la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$
- Montrer que les composantes de  $U_n$  ont une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$
- Que dire du vecteur  $U = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) \right)$  ?

#### Exercice 4 (Edhec)

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, 4. Un mobile se déplace aléatoirement sur ces sommets selon le protocole suivant :

- au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1
- lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sommets, de manière équiprobable.

On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant  $n$ , avec donc  $X_0 = 1$

On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = (P(X_n = 1) \quad \dots \quad P(X_n = 4))$  définissant la loi de  $X_n$

- Donner la loi de  $X_1$ , son espérance  $E(X_1)$  et sa variance  $V(X_1)$
- Montrer que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov homogène.  
Déterminer sa matrice de transition  $M$  et faire le graphe probabiliste correspondant en indiquant les probabilités de transition.
- Justifier la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$
- On pose :  $J$  la matrice carrée d'ordre 4 ne contenant que des 1
  - Calculer  $J^2$ , puis montrer que : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J^n = 4^{n-1}J$
  - Déterminer les valeurs propres de  $J$  et les sous-espaces propres correspondants.
  - Justifier que  $J$  est diagonalisable.
- Ecrire  $M$  comme combinaison linéaire de  $J$  et de  $I_4$
  - En utilisant la formule du binôme de Newton, en déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n$  est une combinaison linéaire de  $I_4$  et de  $J$  que l'on explicitera.
  - Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = U_0 M^n$ . En déduire la loi de  $X_n$
- Montrer que la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une probabilité invariante (état stable).

7. Soit  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Vérifier que  $MC = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}C$
- En déduire : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(X_n) = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}E(X_{n-1})$
- Déterminer  $E(X_n)$  en fonction de  $n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$

## Exercice 5

On considère une urne contenant initialement 2 boules blanches et 1 boule noire et on dispose d'une pièce équilibrée.

On effectue une suite de tirage selon le protocole suivant :

- on pioche une boule de l'urne et on lance la pièce ;
- si on obtient PILE, on remet la boule dans l'urne ;
- si on obtient FACE, on écarte la boule et on remet dans l'urne une boule de la couleur opposée (noire si on a pioché une boule blanche, et blanche si on a pioché une boule noire).

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  le nombre de boules noires à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  tirage, et on posera  $X_0 = 1$

On note enfin, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3))$  (loi de  $X_n$ )

1. Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{6}P(X_n = 1)$
2. Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{6}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3)$
3. Déterminer, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $P_{X_n=i}(X_{n+1} = i)$ ,  $P_{X_n=i-1}(X_{n+1} = i)$  et  $P_{X_n=i+1}(X_{n+1} = i)$   
Regrouper les résultats obtenus dans un graphe probabiliste schématisant le passage de l'état au tirage  $n$  à l'état au tirage  $n + 1$ .
4. Déterminer la matrice de transition  $M$  associée à la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$
5. Justifier la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M$
6. Montrer que  $\text{Sp}(M) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$
7. Déterminer une matrice inversible  $P$  de deuxième ligne ne contenant que des 1, telle que :  
 $M = P D P^{-1}$  avec  $D = \text{Diag}\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$   
*réponse :*  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
8. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = U_n P$ . Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = V_0 D^n$
9. On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$  et  $V_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ 
  - Déterminer, quand  $n \rightarrow +\infty$ , les limites de  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ , respectivement notées  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
  - On pose  $V = (\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta)$  et  $U = V P^{-1} = (a \quad b \quad c \quad d)$   
Montrer que  $a, b, c, d$  sont les limites respectives de  $a_n, b_n, c_n, d_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$
  - Justifier que  $U$  est une loi de probabilité invariante (état stable) pour la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

## Exercice 6

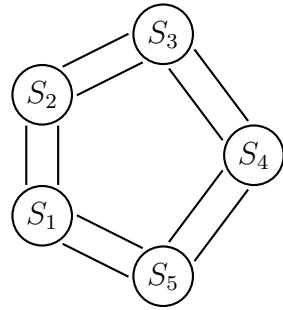
Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$  avec  $N \geq 2$ , indiscernables.

On effectue une suite de tirages indépendants **avec remise** dans cette urne et on note, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  la variable aléatoire égale au nombre de numéros obtenus à l'issue des  $n$  premiers tirages.

1. Indiquer  $T_n(\Omega)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Que vaut  $T_1$  ?
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , que dire de la loi de  $T_{n+1}$  sachant  $[T_n = N]$  ?
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour deux entiers naturels  $i$  et  $j$ , avec  $i < N$ , calculer  $P_{T_n=i}(T_{n+1} = j)$  dans les cas  $j = i$  et  $j = i + 1$
4. Justifier que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une chaîne de Markov homogène. On notera  $M_N$  sa matrice de transition.
5. Justifier que  $M_N$  est diagonalisable.
6. Dans cette question, on considère le cas  $N = 3$  et on note  $M = M_3$ 
  - a. Déterminer une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant tels que  $M = PDP^{-1}$
  - b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$   
Déterminer  $P^{-1}$  et en déduire explicitement  $M^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$
  - c. Soit  $U_n = \begin{pmatrix} P(T_n = 1) & P(T_n = 2) & P(T_n = 3) \end{pmatrix}$   
Montrer que : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n = U_1 M^{n-1}$ , puis expliciter  $U_n$
  - d. Montrer que les composantes de  $U_n$  ont une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$   
En notant  $U = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = 3) \right)$ , à quoi correspond  $U$  ?

### Exercice 7 - marche sur un pentagone

Deux personnes  $P_1$  et  $P_2$  ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  disposés en pentagone et reliés par des routes comme l'illustre le schéma ci-contre. Elles arrivent au rendez-vous l'heure prévu, mais suite à un malentendu,  $P_1$  se présente au site  $S_1$  et  $P_2$  au site  $S_2$ .



Elles décident alors de partir à la recherche l'une de l'autre. Elles empruntent les différentes routes du complexe avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacune choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacements se font indépendamment les uns des autres.

Elles continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvées, elles ne se déplacent plus.

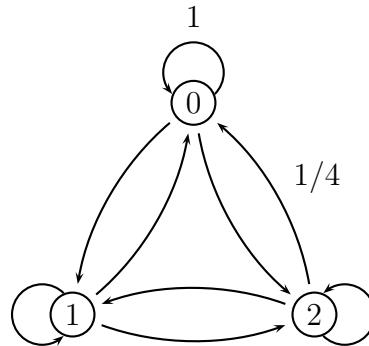
Pour tout entier naturel  $n$ , on définit une variable aléatoire  $X_n$  à valeurs dans  $\{0, 1, 2\}$  par :

- $[X_n = 0]$  : « les deux personnes sont sur le même site après le  $n^{\text{ème}}$  déplacement »
- $[X_n = 1]$  : « les deux personnes sont sur deux sites adjacents après le  $n^{\text{ème}}$  déplacement »
- $[X_n = 2]$  : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le  $n^{\text{ème}}$  déplacement »

1. Préciser  $X_0$

2. Montrer que  $P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$  et  $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = 1$

3. Déterminer les autres probabilités conditionnelles  $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$  pour  $(i, j) \in \{0, 1, 2\}$   
On représentera les résultats en reproduisant et en complétant le schéma suivant :



4. Déterminer la matrice de transition  $M$  associée à la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

5. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = P(X_n = 0)$ ,  $b_n = P(X_n = 1)$  et  $c_n = P(X_n = 2)$

$$\text{On note } \alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ et } \beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 16b_{n+2} - 20b_{n+1} + 5b_n = 0$

b. En déduire deux réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \lambda_1 \alpha^n + \lambda_2 \beta^n$

c. Déterminer de même deux réels  $\mu_1$  et  $\mu_2$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \mu_1 \alpha^n + \mu_2 \beta^n$

d. Montrer que  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . Interpréter le résultat.

6. Montrer qu'il n'existe qu'une seule loi de probabilité invariante (état stable) associée à la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$