**ECG 2** - mathématiques appliquées  Pour le 9 février 2026

## Devoir en temps libre n°7

*Sujet au choix : si vous choisissez ce sujet, devoir à rendre en binôme, obligatoirement (autre option le sujet ESSEC - HEC).*

**Exercice 1** - Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan $A$, $B$ et $C$. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point $A$. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape $n$ à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape $n$ : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape $n$ à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- $A_n$ l'événement « le pion se trouve en $A$ à l'étape $n$ »
- $B_n$ l'événement « le pion se trouve en $B$ à l'étape $n$ »
- $C_n$ l'événement « le pion se trouve en $C$ à l'étape $n$ »

Pour tout $n$ entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, le $n^{\text{ème}}$ état de cette chaîne de Markov.

### Partie I - Modélisation

**1.** Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

**2.** **a.** Déterminer $p_0$, $q_0$, $r_0$ ainsi que $p_1$, $q_1$, $r_1$

**b.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$

**c.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$

### Partie II - Calcul des puissances de la matrice $M$ et application

**3.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

**a.** Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable.

**b.** Calculer $A^2 - 5A$
Quelle sont les valeurs propres possibles de $A$ ?

**c.** Déterminer une matrice inversible $P$ ainsi qu'une matrice diagonale $D$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$
On calculera la matrice $P^{-1}$

**d.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

4. La chaine de Markov associée au graphe probabiliste de la question **1** a-t-elle un état stable ? Si oui, lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$
   **a.** Démontrer que : $M^n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$, où $M$ est la matrice introduite à la question **1**.

   **b.** Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de $q_n$ et $r_n$
6. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   Interpréter ces résultats.

**Exercice 2**

On considère la fonction de deux variables $G$ définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ par
$G(x, y) = \dfrac{x^2}{2y^2} - \ln(x) + y - \dfrac{3}{2}$

1. Représenter graphiquement $U$
2. Justifier que $G$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $G$ en tout point $(x, y) \in U$
4. Montrer que $G$ ne peut présenter d'extremum qu'en un seul point de $U$ que l'on explicitera.
5. La fonction $G$ présente-elle un extremum au point précédent ? Si oui, préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur. Est-il global ?