ECG 2 - mathématiques appliquées Pour le 9 février 2026

Devoir en temps libre n°7 bis

Sujet au choix : si vous choisissez ce sujet (sujet type ESSEC - HEC), l'objectif n'est pas de tout faire.

I - Distance en variations

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} |P(X=k)-P(Y=k)|$ converge.

On définit alors la **distance en variations** $d(X,Y)$ entre X et Y par :

$$d(X,Y)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|P(X=k)-P(Y=k)|$$

2. Montrer les propriétés suivantes :

a. $0\leqslant d(X,Y)\leqslant 1$

b. $d(X,Y)=0$ si, et seulement si : X et Y ont même loi.

c. Montrer que, pour trois variables X,Y,Z à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$d(X,Y)\leqslant d(X,Z)+d(Y,Z)$$

d. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,N]\!]$ avec $N\in\mathbb{N}$ fixé. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} d(X_n,X)=0$

Précision : dans le cas où $X(\Omega)=\mathbb{N}$, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si ; $\forall x\in X(\Omega),\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=x)=P(X=x)$

II - Convergence d'une chaine de Markov

Dans cette partie, on considère une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensemble d'états fini $\{1,2,\dots r\}$ où r est un entier supérieur ou égal à 2

On notera $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des vecteurs lignes $V=(v_1\quad v_2\quad \dots\quad v_r)\in\mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\forall i\in[\![1,r]\!],\quad v_i\geqslant 0$
- $\sum_{i=1}^{r} v_i=1$

On note A la matrice de transition de la chaine $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{G}$ le graphe probabiliste associé à cette chaine.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible si $\mathcal{G}$ est connexe.

On note, pour $(i,j)\in[\![1,r]\!]^2$, $a_{i,j}$ l'élément en ligne i et colonne j de A, et $a_{i,j}^{(k)}$ l'élément en ligne i et colonne j de la matrice A^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

On fera attention à ne pas confondre $a_{i,j}^{(k)}$ et $a_{i,j}^k$, ce dernier désignant la puissance $k^{\text{ème}}$ du nombre $a_{i,j}$

On notera $U_n=(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)\quad \dots\quad P(X_n=r))$ le vecteur ligne définisssant la loi de X_n pour $n\in\mathbb{N}$

On remarquera que $U_n\in\mathcal{P}_r$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

L'objectif de cette partie est de montrer, sous une condition suffisante portant sur la matrice A, qu'il existe un unique état stable pour la chaine de Markov, c'est-à-dire un unique vecteur ligne $\pi = \begin{pmatrix}\pi_1 & \dots & \pi_r\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ vérifiant :

(H1) $\forall i \in [\![1, r]\!], \pi_i \geqslant 0$

(H2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \pi_i = 1$

(H3) $\pi = \pi A$

et, en considérant une variable X à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ dont la loi est donnée par π, de montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X

La loi donnée par π est appelée loi de probabilité invariante ; on dira en abrégé que π est une loi de probabilité invariante.

On admettra le résultat suivant, déductible de la définition d'une chaine de Markov :
Pour $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$ et tous entiers i, j, k de $[\![1, r]\!]$:

$$P_{[X_n=i]\cap[X_{n+1}=j]}\left(X_{n+m} = k\right) = P_{[X_{n+1}=j]}\left(X_{n+m} = k\right)$$

1. Quelques résultats sur les chaines de Markov.

a. Montrer que le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1

b. Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit $i_0 \in [\![1, r]\!]$ l'indice tel que $|w_{i_0}| = \max\{|w_i|\,; i \in [\![1, r]\!]\}$.

a. Justifier que : $|w_{i_0}| > 0$

b. En considérant la ligne i_0 dans le produit matriciel AW, montrer que : $|\lambda| \leqslant 1$

Ainsi, toutes les valeurs propres (réelles) de la matrice A sont dans $[-1, 1]$

2. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall (i, j) \in [\![1, r]\!]^2, \quad P_{[X_n=i]}\left(X_{n+k} = j\right) = a_{i,j}^{(k)}$$

Justifier alors que l'on peut passer de l'état i à l'état j si et seulement s'il existe un entier $k > 0$ tel que $a_{i,j}^{(k)} > 0$

3. Montrer que, s'il existe un entier $k > 0$ tel que A^k a tous ses éléments strictement positifs, alors la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible.

On considère à présent la condition suivante, appelée condition de Doeblin :
Il existe un entier $\ell > 0$, un réel $c > 0$ et un élément $\mu = (\mu_1 \quad \dots \quad \mu_n) \in \mathcal{P}_r$ tel que :

$$\forall j \in \{1, \dots r\}, \forall i \in \{1, \dots r\}, \quad a_{i,j}^{(\ell)} \geqslant c\mu_j$$

4. Un exemple.

On considère la chaine de Markov de matrice de transition $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a. Déterminer son graphe probabiliste.

b. Calculer A^2. En déduire que A satisfait la condition de Doeblin avec $\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

c. Montrer que la chaine admet un unique état stable et le déterminer.

d. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

5. On suppose dans cette question que A^l a tous ses éléments strictements positifs pour une valeur $l \in \mathbb{N}^*$ donnée.
On pose, pour $j \in [\![1, r]\!]$:

- $m_j = \min\left(a_{1,j}^{(l)}, \dots, a_{r,j}^{(l)}\right)$
- $m = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} m_j$
- $\mu_j = \dfrac{m_j}{m}$
- $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \dots \mu_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$

Justifier que : $\mu \in \mathcal{P}_r$ et que $\forall (i,j) \in \{1, \dots r\}, a_{i,j}^{(l)} \geqslant m\mu_j$

Ceci montre que A satisfait la condition de Doeblin.
On pourra vérifier que le vecteur μ ainsi défini est bien celui utilisé dans la question 4b avec $m = \dfrac{3}{4}$

On suppose pour ce qui suit, et pour simplifier, que A satisfait la condition de Doeblin avec $\ell = 1$, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ et $\mu \in \mathcal{P}_r$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots r\}^2, \quad a_{i,j} \geqslant c\mu_j$$

6. Montrer que $c \leqslant 1$ (considérer la somme sur j).

7. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la relation entre U_{n+1}, U_n et A. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in [\![1, r]\!]$:

$$P(X_{n+1} = j) - P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{r} \left(P(X_n = k) - P(X_{n-1} = k)\right)(a_{k,j} - c\mu_j)$$

b. Déduire de la question précédente que : pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$d\left(X_{n+1}, X_n\right) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r}\left(\left|P\left(X_n=k\right)-P\left(X_{n-1}=k\right)\right| \sum_{j=1}^{r}\left(a_{k, j}-c \mu_j\right)\right)$$

puis que :

$$d\left(X_{n+1}, X_n\right) \leqslant(1-c) d\left(X_n, X_{n-1}\right)$$

c. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in N, \quad d\left(X_{n+1}, X_n\right) \leqslant(1-c)^n d\left(X_1, X_0\right)$$

d. On pose $u_n(k)=P\left(X_n=k\right)$ pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ fixé.
Justifier qu'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad\left|u_{n+1}(k)-u_n(k)\right| \leqslant K(1-c)^n$$

en déduire que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0}\left(u_{n+1}(k)-u_n(k)\right)$ est une série convergente, puis que $\left(u_n(k)\right)_{n \geqslant 0}$ est une suite convergente.

e. Conclure que $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X

On notera $\pi=(P(X=1) \quad P(X=2) \ldots P(X=r))$ le vecteur de $\mathcal{P}_r$ définissant la loi de X

8. Montrer que $\pi=\pi A$

Ceci signifie que π est une loi de probabilité invariante.
*La conséquence des questions **7** et **8** est que, sous la condition de Doeblin, la chaine de Markov $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergera toujours vers X quel que soit l'état initial, c'est-à-dire la loi de X_0 (donnée par U_0).*

9. Montrer que π est l'unique loi de probabilité invariante pour la chaine $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

10. Supposons que $-1 \in \operatorname{Sp}(A)$ et soit W un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1

a. Justifier qu'il existe un élément $U_0 \in \mathcal{P}_r$ tel que $U_0 W \neq 0$

b. Soit $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaine de Markov de matrice A telle que la loi de X_n soit donnée par $U_n \in \mathcal{P}_r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc telle que X_0 soit de loi U_0).
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{2 n} W=U_0 W$ et $U_{2 n+1} W=-U_0 W$

c. En déduire que $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger en loi.

d. Conclure que $-1 \notin \operatorname{Sp}(A)$

*Les résultats des questions **7**, **8**, **9** et **10** restent valables pour une matrice vérifiant la condition de Doeblin avec $\ell \in \mathbb{N}^*$*