

Devoir en temps libre n°7

Corrigé

Total sur 27 points

Exercice 1 - Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan A , B et C . Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n »
- B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n »
- C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n »

Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, le $n^{\text{ème}}$ état de cette chaîne de Markov.

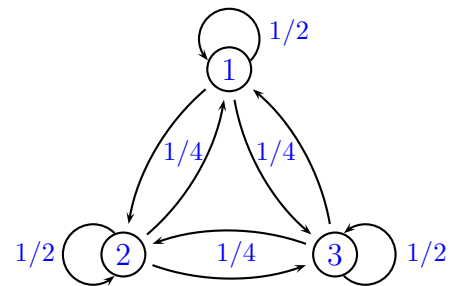
Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est : 1 point

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On représente le graphe où les trois sommets ont un rôle symétrique.

La matrice contient les probabilités conditionnelles, puisque la probabilité de rester sur le même sommet est de $\frac{1}{2}$, les valeurs sur la diagonale sont égales à $\frac{1}{2}$ et les autres transitions étant équiprobables, les valeurs hors diagonales sont égales à $\frac{1}{4}$



2. a. Déterminer p_0 , q_0 , r_0 ainsi que p_1 , q_1 , r_1 1 point

A l'instant $n = 0$, le pion se trouve en A , ainsi $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ et $r_0 = 0$ par conséquent, la probabilité que le pion soit à nouveau en A à l'instant suivant est

$\frac{1}{2}$ et la probabilité qu'il soit en B ou C est de $\frac{1}{4}$ donc $p_1 = \frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{4}$ et $r_1 = \frac{1}{4}$

- b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$ 1,5 points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événement $\{A_n, B_n, C_n\}$, donne pour A_{n+1}

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$$

on obtient de même pour B_{n+1} et C_{n+1}

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \quad \text{et} \quad r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$$

l'écriture matricielle donne $V_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} M = V_n M$

- c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$ 1 point

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n) : V_n = V_0 M^n$

Initialisation : $V_0 M^0 = V_0 I_3 = V_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$

au rang $n+1$: $V_{n+1} = V_n M \stackrel{HR}{=} V_0 M^n M = V_0 M^{n+1}$ ainsi $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie i.e. $V_n = V_0 M^n$

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

- a. Justifier que la matrice A est diagonalisable. 0,25 point

A est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable.

- b. Calculer $A^2 - 5A$ 1,75 points

Quelle sont les valeurs propres possibles de A ?

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_3$$

ce qui nous donne l'égalité $A^2 - 5A + 4I_3 = 0_3$

le polynôme $P(x) = x^2 - 5x + 4$ est donc un polynôme annulateur de A

or les valeurs propres sont alors incluses dans les racines de P et le polynôme P se

décompose en $P(X) = (x-4)(x-1)$

donc $\text{Sp}(A) \subset \{1, 4\}$

- c. Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$ 6 points

On calculera la matrice P^{-1}

Etudions les sous-espaces propres éventuels :

- pour $E_1(A)$ (sous réserve que 1 soit valeur propre) :

$$X = {}^t(x \ y \ z) \in E_1(A) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y - z \end{cases} \iff X = {}^t(-y - z \ y \ z) = y {}^t(-1 \ 1 \ 0) + z {}^t(-1 \ 0 \ 1)$$

ainsi, 1 est bien valeur propre (car il existe des solutions non nulles) et

$$E_1(A) = \text{Vect}({}^t(-1 \ 1 \ 0), {}^t(-1 \ 0 \ 1))$$

Nota bene : ici, il « suffit » de proposer une matrice P qui fonctionne, donc il n'est pas nécessaire d'en faire plus. Sinon, on pourrait préciser que la famille $({}^t(-1 \ 1 \ 0), {}^t(-1 \ 0 \ 1))$ est une famille génératrice de $E_1(A)$ et que comme les vecteurs sont non-colinéaires, c'est aussi une famille libre, donc c'est une base de $E_1(A)$

- de même, pour $E_4(A)$

$$\begin{aligned}
X = {}^t(x \ y \ z) \in E_4(A) &\iff \begin{cases} -2x & +y & +z & = 0 \\ x & -2y & +z & = 0 \\ x & +y & -2z & = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x & -2y & +z & = 0 \\ -2x & +y & +z & = 0 \\ x & +y & -2z & = 0 \end{cases} \\
&\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x & -2y & +z & = 0 \\ -3y & +3z & = 0 \\ +3y & -3z & = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x & -2y & +z & = 0 \\ -3y & +3z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \iff X = {}^t(z \ z \ z) = z {}^t(1 \ 1 \ 1)
\end{aligned}$$

ainsi, 4 est bien valeur propre et $E_4(A) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 1))$

$$\text{on pose alors } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

enfin, on obtient P^{-1} par

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

P est donc inversible et la matrice inverse de P est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{enfin on calcule } AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $AP = PD$ et puisque P est inversible, on en déduit $A = PDP^{-1}$

- d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

1 point

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n) : A^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation : $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$

au rang $n+1$: $A^{n+1} = AA^n \stackrel{HR}{=} PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

donc par théorème de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vrai, i.e. $A^n = PD^nP^{-1}$

4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ?
Si oui, lequel ?

1,5 points

Un état stable est un vecteur $V = (x \ y \ z)$ vérifiant $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ et $\begin{cases} V = VM \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

si V est un état stable, comme M est symétrique, on a ${}^tV = {}^tM^tV$ i.e. ${}^tV = M^tV$

donc ${}^tV = \frac{1}{4}A^tV$ car $M = \frac{1}{4}A$, et donc $A^tV = 4^tV$ i.e. ${}^tV \in E_4(A)$

donc d'après la question 3.c. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, V = (\lambda \ \lambda \ \lambda)$

et la deuxième condition nous donne $3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ ainsi, $V = \left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right)$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$

- a. Démontrer que : $M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite

à la question 1.

2 points

Soit $n \in \mathbb{N}$, par propriété sur les matrices diagonales $D^n = \text{Diag}(4^n, 1^n, 1^n)$, et donc :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{4^n} A^n = \frac{1}{4^n} P D^n P^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n & -1 & -1 \\ 4^n & 1 & 0 \\ 4^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- b. Démontrer que $p_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n 1 point

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p_n \ q_n \ r_n) = V_n = V_0 M^n = (1 \ 0 \ 0) M^n$

V_n est donc la première colonne de M^n

donc $V_n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} (4^n + 2, 4^n - 1, 4^n - 1) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n}, 1 - \frac{1}{4^n}, 1 - \frac{1}{4^n}\right)$

ainsi, on obtient $p_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ et $q_n = r_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

6. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Interpréter ces résultats.

1 point

$$\frac{1}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (forme } q^n \text{ avec } |q| = \frac{1}{4} < 1) \text{ car } \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

donc par opérations $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3}$ et de même, $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$ et $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$
ainsi, on retrouve la propriété que l'« état limite » est égal à l'état stable, c'est-à-dire ici qu'à long terme, les trois positions du pion sont équiprobables.

Exercice 2

8 points

On considère la fonction de deux variables G définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ par

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln(x) + y - \frac{3}{2}$$

1. Représenter graphiquement U

1 point

On représente les deux « quarts » du plan qui exclut les valeurs négatives pour x et 0 pour y (cf. ci-contre).

2. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U

1 point

$(x, y) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^2$ car polynomiale et $t \mapsto \ln(t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition $(x, y) \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^2$

$(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto 2y^2$, $(x, y) \mapsto y - \frac{3}{2}$ sont $\mathcal{C}^2$ car polynomiales donc par opérations (addition et quotient), G est $\mathcal{C}^2$

3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de G en tout point $(x, y) \in U$

2 points

On dérive par rapport à x ,

$$\forall (x, y) \in U, \partial_1 G(x, y) = \frac{2x}{2y^2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$$

et par rapport à y (on écrit $\frac{x^2}{2y^2} = \frac{x^2}{2} y^{-2}$),

$$\forall (x, y) \in U, \partial_2 G(x, y) = -2 \times \frac{x^2}{2} y^{-3} + 1 = -\frac{x^2}{y^3} + 1$$

on calcule alors les dérivées secondes :

$$\forall (x, y) \in U, \partial_{1,1}^2 G(x, y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{d'après le théorème de Schwarz } \partial_{1,2}^2 G(x, y) = \partial_{2,1}^2 G(x, y) = -\frac{2x}{y^3}$$

$$\text{et enfin } \partial_{2,2}^2 G(x, y) = \frac{3x^2}{y^4}$$

4. Montrer que G ne peut présenter d'extremum qu'en un seul point de U que l'on explicitera.

Si G admet un extremum, alors G admet un point critique. On va donc chercher dans un premier temps les points critiques.

1,5 points

Soit $(x, y) \in U$, alors G admet un point critique $\Leftrightarrow \nabla G(x, y) = {}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 G(x, y) = 0 \\ \partial_2 G(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} = 0 \\ -\frac{x^2}{y^3} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y^2} = \frac{1}{x} \\ \frac{x^2}{y^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \text{ car } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ y^2 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ y^2(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ car } y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ car } x > 0$$

donc G admet un seul point critique et ne peut donc présenter qu'au plus un extremum.

5. La fonction G présente-t-elle un extremum au point précédent ? Si oui, préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur. Est-il global ?

2,5 points

On va étudier la matrice hessienne au point critique, grâce aux dérivées d'ordre 2 calculées plus haut on trouve : $\partial_{1,1}^2 G(1, 1) = 2$, $\partial_{1,2}^2 G(1, 1) = \partial_{2,1}^2 G(1, 1) = -2$ et $\partial_{2,2}^2 G(1, 1) = 3$

$$\nabla^2 G(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et donc } \det(\nabla^2 G(1, 1) - \lambda I_2) = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - (-2)^2 = \lambda^2 - 5\lambda + 2$$

le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 = 17$ donc il admet deux racines (distinctes) λ_1 et λ_2 ; et par propriété sur les racines d'un polynôme du second degré $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a} = 2 > 0$

donc les deux racines sont de même signe et $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} = 5$ donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$

donc la matrice hessienne de G en $(1, 1)$, qui est un point critique, admet deux valeurs propres strictement positives, donc par propriété G admet un minimum local en ce point qui vaut

$$G(1, 1) = \frac{1^2}{2 \times 1^2} - \ln(1) + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 0 + 1 - \frac{3}{2} = 0$$

pour autant il ne s'agit pas d'un extremum global puisque G peut prendre des valeurs négatives

$$\text{par exemple } G(1, -10) = \frac{1^2}{2 \times (-10)^2} - \ln(1) - 10 - \frac{3}{2} = \frac{1}{200} - \frac{23}{2} < 0$$