

Concours blanc - épreuve 1 - sujet 2 : type EDHEC

Corrigé

Total sur 78,5 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

Exercice 1 - EDHEC 2024

19 points

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$

1. a. Déterminer les réels a et b tels que : $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$ 1 point

Soit $x \in [0, 1]$, et a, b les réels vérifiant l'égalité de l'énoncé, alors

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x) + b(2-x)}{4-x^2} = \frac{2(a+b) + (a-b)x}{4-x^2}$$

donc par identification des coefficients, $a-b=0$ soit $a=b$ et $2(a+b)=1$ donc

$$a = b = \frac{1}{4}$$

- b. En déduire que $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$ 1,5 points

En utilisant la question précédente :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{4(2-x)} dx + \int_0^1 \frac{1}{4(2+x)} dx = \frac{1}{4} \left([-\ln|2-x|]_0^1 + [\ln|2+x|]_0^1 \right)$$

$$\text{donc } u_0 = \frac{\ln(2) + \ln(3) - \ln(2)}{4} \text{ soit } u_0 = \frac{\ln(3)}{4}$$

2. Calculer u_1 1,5 points

Il suffit de remarquer que $\frac{x}{4-x^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ plus précisément $-\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{4-x^2}$ et donc une primitive de $x \mapsto \frac{x}{4-x^2}$ est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $x \mapsto -\frac{\ln(4-x^2)}{2}$

$$\text{donc } u_1 = \left[-\frac{\ln(4-x^2)}{2} \right]_0^1 = \frac{-\ln(3) + \ln(4)}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ soit } u_1 = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3. a. Pour tout entier naturel n , exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n 1,5 points

$$\text{Pour tout entier } n, 4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx$$

$$\text{donc } 4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \text{ soit } 4u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

- b. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u = np.log(3) / 4
        for k in range(2, n + 1, 2) :
            u = 4 * u - ...
    else :
        u = np.log(2 / np.sqrt(3))
        for k in range(3, n + 1, 2) :
            u = 4 * u - ...
    return u
```

2 points

D'après la question précédente, pour tout entier n , $u_{n+2} = 4u_n - \frac{1}{n+1}$. Le programme calcule les termes de u_n par récurrence en incrémentant n de 2 à chaque étape, d'où le paramètre 2 pour le saut dans le **range** à chaque fois.

Le programme teste la parité à l'aide de $(-1)^n$, puis si n est pair, on calcule u_n en utilisant la formule de récurrence et en partant de u_0 . Si n est impair, on fait de même en partant de u_1 .

Donc d'après la question précédente encore, dans chaque cas il suffit de compléter avec $1/(n-1)$ car $u_n = u_{n-2} + \frac{1}{n-1}$.

4. a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

2 points

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ donc $3 \leq 4 - x^2 \leq 4$ puis par décroissance de la fonction inverse

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$ et en multipliant par $x^n \geq 0$ car $x \in [0, 1]$, on obtient : $\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}$

alors par croissance de l'intégrale (car $a < b$),

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \text{ soit } \frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{or } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 \text{ donc}$$

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

- b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0,5 point

La suite (u_n) est encadrée par les suites $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent toutes les

deux vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on conclut que la suite (u_n) converge aussi vers 0

- c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

2 points

D'après la question 4.a., $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$

de plus, $\frac{1}{4(n+1)} \sim \frac{1}{4n}$ car $\frac{\frac{1}{4n}}{\frac{1}{4(n+1)}} = \frac{4(n+1)}{4n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$

et $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente (série harmonique)

donc par linéarité $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4} \times \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n}$ diverge également

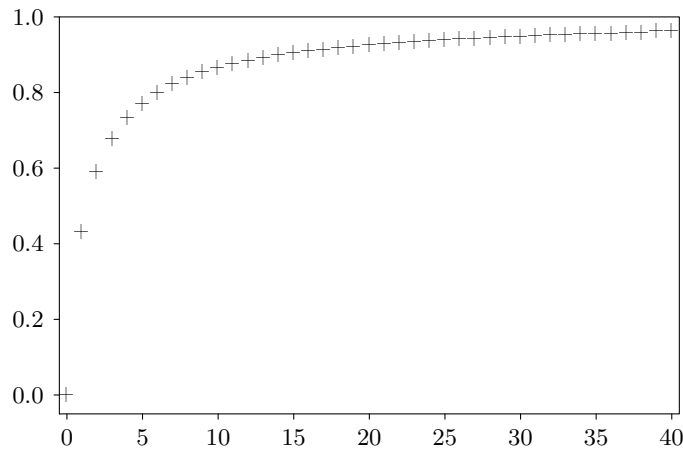
donc par comparaison de séries à terme positifs (équivalents puis inégalité) on en déduit que

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4(n+1)}$ puis $\sum_{n \geq 1} u_n$ divergent et donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge

5. a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x = np.arange(0,41)
u = [] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3 * n * suite(n))
plt.plot(x,u, '+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

A : $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n$ **B :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ **C :** $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ **D :** $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ 1,5 points

Ce programme affiche les points de coordonnées $(n, 3nu_n)$ pour n allant de 0 à 40. On voit que l'ordonnée des points s'approche de 1 et on conjecture donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

b. Etablir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante : 2 points

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ et $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$ et $g'(x) = x^n$

donc par intégration par parties, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$

donc
$$u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

c. Montrer par encadrement que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$ 2 points

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme nous l'avons montré à la question 4.a., pour tout $x \in [0, 1]$:

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{4}$ et donc $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4-x^2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$

soit $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{16}$ et donc $\frac{x^n}{9} \leq \frac{x^n}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^n}{16}$ car $x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$

donc par croissance de l'intégrale ($a < b$), $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx$

d'où $\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)}$ et alors comme $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ est encadrée par des termes

qui convergent vers 0, on peut conclure que
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0$$

d. Vérifier la conjecture établie à la question 5.a. 1,5 points

D'après la question précédente, $3nu_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$

or $\frac{3n}{3(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ et comme vu à la question 4.c. $n+1 \sim n$ donc $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$

donc $\frac{6n}{n+1} = 6 \times \frac{n}{n+1} \rightarrow 6$ et donc par opérations sur les limites $3nu_n \rightarrow 1 - 6 \times 0 = 1$

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$ et donc par définition $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n$ conformément à la conjecture de la question 5.a.

Exercice 2 - Edhec 2023

12 points

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

1. a. Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre. 0,5 point

La matrice A est triangulaire (supérieure) donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $Sp(A) = \{a, b\} = \{a\}$ car $a = b$ ici

donc dans ce cas ($a = b$), A n'a qu'une seule valeur propre (à savoir a)

- b. En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable. 1,5 points

Supposons que A soit diagonalisable, alors il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$

de plus, les coefficients diagonaux de D sont valeurs propres de A

donc, d'après la question précédente, $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, i.e. $D = aI_2$

par conséquent, $A = P(aI_2)P^{-1} = aPI_2P^{-1} = aPP^{-1} = aI_2$, ce qui est contradictoire avec la définition

de A donc notre hypothèse de départ est fausse et donc dans ce cas ($a = b$), A n'est pas diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$

- a. Quelles sont les valeurs propres de A ? 0,5 point

Comme on l'a vu à la question 1.a., les valeurs propres de A sont a et b . Cette fois, il y en a deux (étant donné que a et b sont supposés distincts).

- b. Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$? 1 point

On calcule : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$

on en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre a et que $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$

est un vecteur propre de A associé à la valeur propre b

- c. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ 2 points

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (b-a)\mu = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ car $b - a \neq 0$ par hypothèse donc $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, comme de plus elle est constituée de 2 vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et que $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$, on en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ est la matrice des vecteurs de $\mathcal{B}$

décomposés selon la base canonique soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b - a \end{pmatrix}$

- d. Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

On pose $D = \text{diag}(a, b)$ et on calcule,

1,5 points

$$AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b - a) \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b - a) \end{pmatrix}$$

donc $AP = PD$ et étant donné que P est inversible (c'est une matrice de passage d'une base à une autre), on en déduit que $A = PDP^{-1}$ et donc que A est diagonalisable.

3. On considère deux variables aléatoires, X et Y , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$

a. Etablir l'égalité : $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$

1,5 points

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = Y) \cap (Y = n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = n))$$

ce qui donne bien, par indépendance de X et Y :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$

Remarque : on peut aussi écrire $(X = Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ([X = n] \cap [Y = n])$ puis passer aux probabilités en utilisant l'incompatibilité et l'indépendance.

- b. En déduire explicitement $P(X = Y)$

2 points

Comme X et Y suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, on déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \quad \text{par relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{car il s'agit d'une série géométrique convergente de raison } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où finalement $P(X = Y) = \frac{1}{3}$

4. Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$

a. Déterminer la probabilité p pour que $A(X, Y)$ ne soit pas diagonalisable. 1 point

D'après les questions 1.b. et 2.d., $A(X, Y)$ est non diagonalisable si et seulement $X = Y$, donc, d'après

la question précédente, la probabilité que $A(X, Y)$ ne soit pas diagonalisable est

$$p = \frac{1}{3}$$

b. On considère le script Python suivant :

1,5 points

```
m=int(input("Entrez une valeur entière pour m : "))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m , de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

Le programme effectue m simulations des variables aléatoires X et Y . Le réel c/m est la proportion de simulations où X et Y prennent des valeurs identiques. Pour m grand, c'est donc une valeur approchée de $p = P(X = Y)$

étant donné que $i = 1 - c/m$, on en déduit que pour m grand,

i est une valeur approchée de $1 - p = P(X \neq Y)$, i.e. $\frac{2}{3}$ d'après la question précédente.

Exercice 3

15,5 points

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Partie 1

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

0,5 point

f est une fonction polynomiale, donc elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

2. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f

1 point

En dérivant selon x , on trouve

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y$$

et selon y ,

$$\partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x$$

b. Déterminer les points critiques de f

2 points

Les points critiques de f sont les couples (x, y) qui annulent le gradient : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x^3 = 1 \end{cases}$$

or $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ car la fonction cube est bijective et $1^3 = 1$

Donc f admet deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$

3. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f

1 point

On dérive les dérivées partielles d'ordre 1 trouvée plus haut et on obtient :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 6x, \partial_{2,2}^2 f(x, y) = 6y$$

$$\text{et } \partial_{1,2}^2 f(x, y) = -3 = \partial_{2,1}^2 f(x, y)$$

d'après le théorème de Schwarz

- b. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur. 3 points

D'après la question précédente, la matrice hessienne de f en (x, y) vaut :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \text{ et comme } \mathbb{R}^2 \text{ est un ouvert, si } f \text{ admet un extremum local en un point, alors } f$$

admet un point critique en ce point. Nous allons donc étudier les valeurs propres des matrices hessiennes aux deux points trouvés à la question précédente :

- Au point $(0, 0)$, $\nabla^2 f(0, 0) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}$.

$$\text{ainsi, } \lambda \text{ est valeur propre de } \nabla^2 f(0, 0) \Leftrightarrow \det(\nabla^2 f(0, 0) - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 3) = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ou } \lambda = 3$$

les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(0, 0)$ sont 3 et -3 qui sont de signes opposés et donc par propriété

f n'a pas d'extremum au point $(0; 0)$ (il s'agit d'un point col/selle).

- Au point $(1, 1)$, $\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont les racines du polynôme :

$$\det(\nabla^2 f(1, 1) - \lambda I_2) = \det \left(\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right) = (6-\lambda)^2 - 3^2 = (6-\lambda-3)(6-\lambda+3) = (3-\lambda)(9-\lambda)$$

les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(1, 1)$ sont 3 et 9 et sont donc strictement positives donc, par propriété :

f admet un minimum local en $(1, 1)$ qui vaut $f(1, 1) = -1$

4. Cet extremum est-il global ?

1 point

$f(1, 1) = -1$ n'est pas un minimum global puisque $f(0, -2) = -8 < f(1, 1)$

Nota bene : avec les termes x^3 et y^3 (qui prédominent sur les termes en x et y) on comprend que la fonction peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x, 1)$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x , possède une unique solution que l'on notera u_n 3 points

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 3$

alors $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$ (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$) $\Leftrightarrow x \notin [-1, 1]$

de plus $g(x) = x(x^2 - 3) + 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$

donc par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ (pas indispensable) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

de plus $g(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = 3$ et $g(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ d'où le tableau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

On en déduit donc que :

- d'une part $\forall x < 1, g(x) \leq 3$ et donc que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 : l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution dans $] -\infty, 1[$
- d'autre part g réalise une bijection (car continue et strictement croissante sur cet intervalle) de $[1, +\infty[$ sur $[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=] -1, +\infty[$ et comme tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 appartient à $[-1, +\infty[$, n admet un unique antécédent par g , autrement dit l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution dans $[1, +\infty[$, que l'on notera u_n

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$

a. Dresser le tableau de variations de h^{-1}

1 point

Comme nous l'avons vu à la question précédente, h réalise une bijection, continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$, donc par propriété sa bijection réciproque h^{-1} est elle aussi strictement croissante de $[-1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, d'où son tableau de variation :

x	-1	$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$+\infty$

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

1 point

Par définition de $u_n, g(u_n) = h(u_n) = n \Rightarrow u_n = h^{-1}(n)$

de plus (la propriété n'est pas officiellement dans notre programme), on comprend de la question précédente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = +\infty$ donc par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-1}(n) = +\infty$$

Option B : comme nous l'avons vu $g(u_n) = n$ i.e. $u_n^3 - u_n + 1 = n$ et donc $u_n^3 = n + u_n - 1$ donc $u_n^3 \geq n$ comme $u_n \in [1, +\infty[$ donc par théorème des gendarmes (version infinie), $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = +\infty$

puis on obtient le résultat par composition avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$

c. En déduire, en revenant à la définition de u_n , le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$

2 points

Comme nous l'avons évoqué à la question précédente, la définition de u_n donne $n = g(u_n) = u_n^3 - 3u_n + 1$

$$1 = u_n^3 \left(1 - \frac{3}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^3} \right)$$

donc puisque d'après la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors par opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n^3} = 1$

or la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{u_n^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}}$

et $\left(\frac{n}{u_n^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{(u_n^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{u_n}$ donc nous avons montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{u_n} = 1$ soit par définition $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$

le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$ est donc $\alpha = \frac{1}{3}$

Problème

29 points

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.

On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A .

Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.

On pose : $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$

1. a. Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0

1 point

La variable X_0 correspond au nombre de boules blanches présentes dans A initialement. D'après l'énoncé, on a $X_0 = 1$ et donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$

- b. Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1

1,5 points

Comme il peut y avoir 0, 1 ou 2 boules blanches, on a $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

- $X_1 = 0$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule blanche dans l'urne A et une boule

noire dans l'urne B . Chaque tirage étant indépendant, $a_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ donc $a_1 = \frac{1}{4}$

- $X_1 = 2$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule noire dans l'urne A et une boule blanche

dans l'urne B . Par indépendance à nouveau : $a_2 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ donc $b_1 = \frac{1}{4}$

- enfin $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $([X_1 = 0], [X_1 = 1], [X_1 = 2])$, est un système complet d'événements et on a

donc : $c_1 = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2)$ soit $c_1 = \frac{1}{2}$

- c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.

1 point

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme précédemment : il y a dans l'urne A , 0, 1 ou 2 boules blanches donc $X_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$. Comme nous l'avons vu avec X_1 , ces trois valeurs admettent une probabilité non nulle et on comprend que ce sera le cas après tous les tirages suivants (pour bien faire, il faudrait le montrer par récurrence : $a_n > 0 \dots$)

finalement $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est donc un système complet d'événements.

- d. En déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$

0,5 point

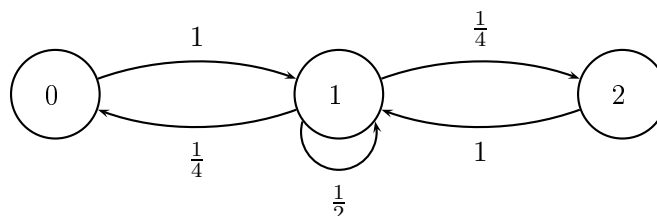
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'événements, par propriété

$$a_n + b_n + c_n = P([X_n = 0]) + P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) = 1$$

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

- a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus. 1,5 points



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'évènement $(X_n = 0)$ soit réalisé. Dans ce cas l'urne A contient deux boules noires et l'urne B contient forcément deux boules blanches. Le tirage va donc forcément aboutir à ce que chaque urne contienne une boule noire et une boule blanche,

donc
$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0, \quad P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1 \quad \text{et} \quad P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$$

Supposons maintenant que l'évènement $(X_n = 1)$ soit réalisé. On est alors dans la même situation qu'avant le premier tirage,

donc
$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$$

Supposons maintenant que l'évènement $[X_n = 2]$ soit réalisé. On est alors dans une situation symétrique à celle où $[X_n = 0]$, où les rôles des boules noires et des boules blanches sont inversées.

On trouve alors
$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1 \quad \text{et} \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$$

Toutes ces probabilités correspondent bien aux poids des arêtes du graphe donné dans l'énoncé.

- b. Ecrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0,2 \rrbracket^2}$, où $m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1 1 point

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition, M est la matrice des probabilités conditionnelles :

$$M = (P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j))_{(i,j) \in \llbracket 0,2 \rrbracket^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La somme des éléments de chaque ligne de la matrice est bien égale à 1 (M est stochastique).

- c. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n

D'après la question 1.c., $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'événements. 2 points

On peut alors utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0)$$

i.e.
$$a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$
 avec les notations de l'énoncé et d'après les résultats de la question 2.a.

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$$

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2)$$

soit
$$b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.c. restent valables pour $n = 0$

0,5 point

D'après 1.a. $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$ et d'après 1.b. $(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

On vérifie alors $\frac{b_0}{4} = \frac{1}{4} = a_1 = c_1$ et $a_0 + \frac{b_0}{2} + c_0 = \frac{1}{2} = b_1$

les relations de la question précédente sont donc bien vérifiées.

4. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}

1 point

Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque X_{n+1} est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance et

$$E(X_{n+1}) = 0 \times P(X_{n+1} = 0) + 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E(X_{n+1}) = 1$

1 point

D'après la question 2.c., $a_{n+1} = c_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}$

donc $E(X_{n+1}) = 1$ car $([X_{n+1} = 0], [X_{n+1} = 1], [X_{n+1} = 2])$ est un système complet d'évènement.

c. Etablir finalement la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n + 2c_n = 1$

0,5 point

D'après les deux questions précédentes $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n + 2c_n = 1$

de plus $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$ d'où finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n + 2c_n = 1$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n , la matrice-ligne $U_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ élément de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

a. Montrer que la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

1,5 points

Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule d'abord (le nombre) $U_n V = (a_n \quad b_n \quad c_n) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a_n - b_n + 2c_n$

donc $U_{n+1} V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = 2\frac{b_n}{4} - a_n - \frac{b_n}{2} - c_n + 2\frac{b_n}{4} = -a_n + \frac{b_n}{2} - c_n = \frac{-1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n)$

d'après les résultats de la question 2.c. donc $U_{n+1} V = -\frac{1}{2}U_n V$ i.e. la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

b. Pour tout entier naturel n , en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n

1 point

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède, on a $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V$

or, on a montré que $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier

$U_0 V = 2a_0 - b_0 + 2b_0 = -1$ on en déduit que : $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , a_n , b_n et c_n puis donner la loi de X_n

1,5 points

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après les questions 1.a. et 2.c. que $a_n = c_n$ pour tout entier n

d'après la question 4.c., $b_n = 1 - 2c_n = 1 - 2a_n$ donc avec le résultat de la question précédente,

$-\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 2a_n - b_n + 2c_n = 2a_n - (1 - 2a_n) + 2a_n = 6a_n - 1$ on en déduit que

$a_n = c_n = \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6}$ puis on trouve $b_n = 1 - 2a_n = 1 - \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{3}$ i.e. $b_n = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3}$

les valeurs de a_n , b_n et c_n nous permettent de déduire directement la loi de X_n :

$P(X_n = 0) = \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6}$, $P(X_n = 1) = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3}$, $P(X_n = 2) = \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6}$

7. Montrer que la suite des variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.

Précision : on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si $\forall x \in X(\Omega)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$ 1,5 pts

Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, pour étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit d'étudier les limites des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

or $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ (forme q^n avec $|q| = \frac{1}{2} < 1$)

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{-0+1}{6} = \frac{1}{6}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{0+2}{3} = \frac{2}{3}$

on en déduit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X

dont la loi est donnée par : $(P(X=0), P(X=1), P(X=2)) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

a. Calculer M^2 et M^3 , puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$

1 point

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{on vérifie alors l'égalité de l'énoncé : } M^2 + M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 2M^3$$

b. En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres. 6 points

On déduit de la question précédente que le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - x$ est annulateur de M

or $P(x) = x(2x^2 - x - 1)$ 1 est racine évidente de $2x^2 - x - 1$, on trouve donc $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

de fait $P(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ et on en déduit que $\text{Sp}(M) \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$

reste alors à vérifier si chacune des racines λ de P est valeur propre de M ou non

• cas $\lambda = -\frac{1}{2}$ alors

$$M + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ donc avec } X = {}^t(x \ y \ z), \left(M + \frac{1}{2}I_3\right)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X \in \{ {}^t(-2y \ y \ -2y), y \in \mathbb{R} \}$ le système possède des solutions non nulles, donc $-\frac{1}{2}$ est une

valeur propre de M et $E_{-\frac{1}{2}}(M) = \text{Vect}({}^t(-2 \ 1 \ -2))$

${}^t(-2 \ 1 \ -2)$ est un vecteur non nul, c'est donc une famille libre, de plus génératrice de $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

par définition du Vect, c'est donc une base de $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

• cas $\lambda = 0$ alors avec les mêmes notations

$$MX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X \in \{ {}^t(x \ 0 \ -x), x \in \mathbb{R} \}$ donc 0 est une valeur propre de M et

$E_0(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 0 \ -1))$ et pour les mêmes raisons ${}^t(1 \ 0 \ -1)$ est donc une base de $E_0(M)$

- enfin, comme c'est le cas pour toutes les matrices stochastiques, $M^t(1 \ 1 \ 1) = {}^t(1 \ 1 \ 1)$ donc 1 est valeur propre et ${}^t(1 \ 1 \ 1)$ est une famille libre de $E_1(M)$ or $E_1(M)$ ne peut être de dimension supérieure stricte à 1, sinon, il aurait une base et donc une famille libre à plus de deux éléments, et par concaténation de familles libres associées à des vecteurs propres distinctes (avec les vecteurs trouvés précédemment), on pourrait constituer une famille libre à plus de 4 éléments, ce qui est impossible donc $E_1(M)$ est de dimension 1 et

$$E_1(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 1)) \quad \text{et de même} \quad {}^t(1 \ 1 \ 1) \text{ est donc une base de } E_1(M)$$

Remarque : on peut également observer que les colonnes de la matrice P de la question suivante donnent les potentiels vecteurs propres (et conclure avec les mêmes considérations de dimension).

- c. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible. 1 point

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P , d'après la question précédente, ces vecteurs sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes et forment donc une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de plus $\text{Card}(C_1, C_2, C_3) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc (C_1, C_2, C_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la matrice

P de fait une matrice de passage, et donc P est inversible.

- d. On pose $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD , puis conclure que M est diagonalisable. 1 point

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $MP = PD$ et comme P est inversible, alors $M = PDP^{-1}$ et donc M est diagonalisable

- e. Etablir la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$ 1 point

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } U_n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_n}{4} & a_n + \frac{b_n}{2} + c_n & \frac{a_n}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix}$$

d'après les résultats de la question 2.c. soit $U_{n+1} = U_n M$

- f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n : $U_n = U_0 M^n$ 1 point

On montre cette égalité par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $Q(n) : U_n = U_0 M^n$

Initialisation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow U_0 = U_0 M^0 \Leftrightarrow U_0 = U_0 I_3 \Leftrightarrow U_0 = U_0$

ce qui est vrai donc $Q(0)$ est vraie

Hérédité : soit n un entier tel que $U_n = U_0 M^n$

alors, d'après la question précédente, $U_{n+1} = U_n M$ donc $U_{n+1} = U_0 M^n M = U_0 M^{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, i.e. $Q(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 M^n$

- g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure). 1 point

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de a_n, b_n et c_n , la loi de X_n est donnée par les coefficients de U_n , il suffit

donc de calculer $U_0 M^n$

et on remarquons que comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il suffit de calculer la seconde ligne de M^n

ensuite, en utilisant la question **8.d.**, on peut démontrer par récurrence que $M^n = P D^n P^{-1}$

enfin, après avoir déterminé P^{-1} par l'algorithme du pivot de Gauss, et par propriété sur les matrices diagonales on trouve D^n puis on peut trouver par le calcul la seconde ligne de M^n