

Mathématiques

Concours blanc - épreuve 1 - 8h - 12h

Sujet 1 : type Ecricome

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le candidat dispose d'une annexe SQL en page 6.

Dans les questions faisant intervenir des instructions en langage Python, on prendra soin d'importer les bibliothèques nécessaires lors de leur première utilisation.

Exercice 1

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x) \ln(y)$$

I - Etude des zéros de φ

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variations de φ .
6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$.
Montrer l'existence d'un unique réel α tel que : $\varphi(\alpha) = 0$ et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.
7. Etablir la convergence de l'intégrale $I = \int_0^\alpha \varphi(x) dx$ et vérifier que :

$$I = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9}$$

8. On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :
 - $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$
 - Pour tout $n \leq 0$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
 - Pour tout $n \leq 0$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$Ecrire un programme avec Python calculant a_7 et b_7 .

II - Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

Rappelons que α est l'unique réel vérifiant $\varphi(\alpha) = 0$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et établir que pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\begin{cases} \partial_{1,1}^2 f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\ \partial_{1,2}^2 f(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \\ \partial_{2,2}^2 f(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

4. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

Exercice 2

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2
3. Montrer que l'application φ_A est un endomorphisme bijectif (donc un isomorphisme) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de T
4. Montrer que la matrice T est diagonalisable.

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

1. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\varphi_A(M) = \lambda M \quad (1)$$

Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

2. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Montrer que N et N' vérifient la condition (1) avec le réel μ

3. Comparer le spectre de la matrice A et l'ensemble des réels permettant de vérifier la condition (1)
4. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ est diagonalisable, où $\mathcal{B}$ est la base canonique introduite à la **partie II**.

Exercice 3

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel k , on pose

$$R_X(k) = P(X > k)$$

La **partie II** est indépendante des autres parties ; les résultats de la **partie I** pourront intervenir dans la **partie III**.

Partie I

1. Soit p un réel de $]0, 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p
 - a. Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k
 - b. Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$
2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$
 - a. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $P(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X
 - b. En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout entier naturel k , $R_X(k) = R_Y(k)$

Partie II

3.
 - a. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$
 - b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$
4. Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$$
 - a. Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $E(X + 1)$
En déduire que X admet une espérance et calculer $E(X)$
 - b. Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $E((X - 1)(X + 1))$
En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1

On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, à l'issue de chaque année numéro k (k étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k - 1)^{\text{ème}}$ année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année k avec la probabilité α_k , et elle continue à fonctionner après la fin de l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

5. Justifier que, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k) R_X(k - 1)$
6. En déduire, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$
7. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression de $P(X = k)$ en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$
On pourra utiliser le résultat de la question 2.a.

8. Etude de deux exemples.

- a. Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, c'est-à-dire :
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p$
Reconnaitre la loi de X
- b. Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$
Déterminer la loi de X

Partie IV

Un fabricant d'ordinateurs souhaite publier des données statistiques sur la durée de vie de ses appareils fabriqués à partir de l'an 2000. Dans une base de données, on dispose d'une table **ordinateurs** contenant des informations sur tous les ordinateurs produits par le fabricant. Cette table possède les attributs (ou colonnes) suivants.

- **id** (de type **INTEGER**) : le numéro d'identification de l'ordinateur.
- **annee_fabrication** (de type **INTEGER**) : l'année de fabrication de l'ordinateur.
- **adresse_ip** (de type **INTEGER**) : l'adresse IP associée à l'ordinateur.
- **annee_panne** (de type **INTEGER**) : l'année où l'ordinateur a cessé de fonctionner, valant -1 si l'ordinateur est encore en état de marche.

Dans les questions qui suivent, en plus des commandes SQL au programme, on pourra utiliser les fonctions présentées dans l'**annexe** en fin de sujet.

9.
 - a. Ecrire une requête SQL permettant de déterminer le nombre total d'ordinateurs produits par le fabricant.
 - b. Ecrire une requête SQL permettant de déterminer le nombre d'ordinateurs ayant cessé de fonctionner exactement un an après leur production.
 - c. Dans cette question uniquement, on suppose que la durée de vie en années d'un ordinateur est une variable aléatoire de loi géométrique, de paramètre p inconnu.
Expliquer de quelle manière le résultat des requêtes écrites dans les questions **9.a.** et **9.b.** peut être utilisé pour estimer le paramètre p
10. Un attribut **duree_vie**, de type **INTEGER**, a été ajouté à la table **ordinateurs**. Aux champs de l'attribut **duree_vie** a été affectée la valeur -1
Ecrire une requête SQL permettant de modifier la table **ordinateurs** en affectant, pour chaque ordinateur, sa durée de vie à l'attribut **duree_vie**. Dans le cas des ordinateurs qui sont encore en état de marche, on ne modifiera pas la valeur -1 déjà affectée.
11. Dans cette question, on cherche à déterminer s'il est raisonnable de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire de loi géométrique d'un certain paramètre p que l'on cherchera à approcher.
 - a. Expliquer, en la complétant, comment le résultat de la requête suivante permet d'obtenir une valeur approchée de p

```
SELECT AVG(duree_vie) FROM ordinateurs WHERE ...
```

- b. Quel(s) biais la requête précédente présente(nt)-elle ?
- c. La base de données compte au total 10 000 ordinateurs. On exécute les requêtes suivantes :

```
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie = 1 ;
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie = 2 ;
      :                               :
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie = 24 ;
```

En utilisant les résultats de la question 8, expliquer de quelle manière les données de la table **ordinateurs** peuvent être exploitées pour déterminer s'il est raisonnable de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire de loi géométrique.

Annexe - Commandes SQL

La fonction COUNT(). La fonction d'agrégation `COUNT()` permet de connaître le nombre d'enregistrements d'une table, vérifiant éventuellement une certaine condition.

Nous donnons ci-dessous plusieurs exemples d'utilisation de la fonction `COUNT()`, en considérant une table nommée `ma_table` comportant deux colonnes `colonne_1` et `colonne_2`

- La requête suivante renvoie le nombre total d'enregistrements dans `ma_table` :

```
SELECT COUNT(*) FROM ma_table
```

- La requête suivante renvoie le nombre d'enregistrements de `ma_table` vérifiant la condition `cond` :

```
SELECT COUNT(*) FROM ma_table  
WHERE cond
```

- La requête suivante renvoie le nombre d'enregistrements de `ma_table` pour lesquels la valeur de `colonne_2` n'est pas vide :

```
SELECT COUNT(colonne_2) FROM ma_table
```

La fonction d'agrégation AVG(). La fonction `AVG()` permet de calculer la moyenne des valeurs d'une colonne dans une table.

Par exemple, si on considère la table nommée `table` contenant les enregistrements suivants :

colonne_1	colonne_2	colonne_3	colonne_4
1	69	Lyon	4
2	31	Toulouse	8
3	54	Nancy	5
4	64	Saint-Jean-de-Luz	17
5	44	Nantes	6

alors la requête suivante

```
SELECT AVG(colonne_4)  
FROM table  
WHERE colonne_1 <= 3
```

affiche la moyenne des valeurs de `colonne_4` des trois premiers enregistrements : **5.6667** c'est-à-dire $\frac{4 + 8 + 5}{3}$