

Mathématiques

Concours blanc - épreuve 1 - 8h - 12h

Sujet 2 : type Edhec

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de Python sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$

1. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

- b. En déduire que $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$

2. Calculer u_1

3. a. Pour tout entier naturel n , exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n

- b. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u = np.log(3) / 4
        for k in range(2, n + 1, 2) :
            u = 4 * u - ...
    else :
        u = np.log(2 / np.sqrt(3))
        for k in range(3, n + 1, 2) :
            u = 4 * u - ...
    return u
```

4. a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

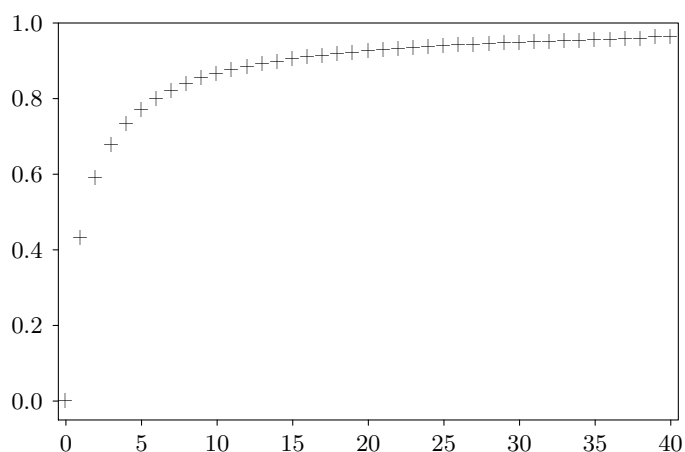
- b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x = np.arange(0, 41)
u = [] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3 * n * suite(n))
plt.plot(x, u, '+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

A : $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n$ **B :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ **C :** $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ **D :** $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

b. Etablir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

d. Vérifier la conjecture établie à la question **5.a.**

Exercice 2

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

1.
 - a. Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.
 - b. En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On suppose dans cette question que $a \neq b$
 - a. Quelles sont les valeurs propres de A ?
 - b. Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?
 - c. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$
 - d. Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.
3. On considère deux variables aléatoires, X et Y , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$

- a. Etablir l'égalité : $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$
- b. En déduire explicitement $P(X=Y)$

4. Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$

- a. Déterminer la probabilité p pour que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.
- b. On considère le script **Python** suivant :

```
m=int(input("Entrez une valeur entière pour m : "))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m , de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

Exercice 3

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
2.
 - a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f
 - b. Déterminer les points critiques de f
3.
 - a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f
 - b. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x , possède une unique solution que l'on notera u_n
6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$
 - a. Dresser le tableau de variations de h^{-1}
 - b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 - c. En déduire, en revenant à la définition de u_n , le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$

Problème

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.

On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A .

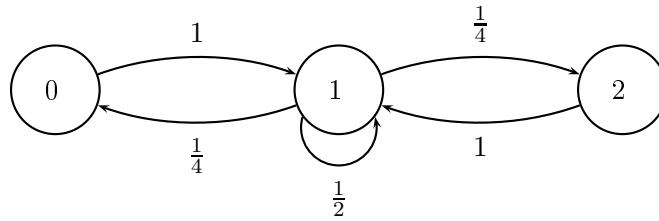
Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.

On pose : $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$

1.
 - a. Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0
 - b. Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1
 - c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.
 - d. En déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



- b. Ecrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2}$, où $m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1
 - c. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n
3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.c. restent valables pour $n = 0$
4.
 - a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}
 - b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E(X_{n+1}) = 1$
 - c. Etablir finalement la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n + 2c_n = 1$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n , la matrice-ligne $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ élément

de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

- a. Montrer que la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.
 - b. Pour tout entier naturel n , en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n
6. Déterminer, pour tout entier naturel n , a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n
7. Montrer que la suite des variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.
Précision : on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si $\forall x \in X(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.
- a. Calculer M^2 et M^3 , puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$
 - b. En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.
 - c. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.
 - d. On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD , puis conclure que M est diagonalisable.
 - e. Etablir la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n M$
 - f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n : $U_n = U_0 M^n$
 - g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).