

Mathématiques

Concours blanc - épreuve 2 - 8h - 12h

Sujet 2 : type ESSEC - HEC

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands.

Les trois parties du sujet sont largement indépendantes. Dans la première, on introduit un outil d'analyse asymptotique. Dans la deuxième, on étudie un type de loi spécifique. Dans la troisième, on donne des conditions plus simples pour vérifier que des propriétés asymptotiques sont satisfaites.

Dans les deux dernières parties, on n'utilise de la partie **I** que les résultats des questions **5.f.iii.** et **5.g.** qu'on pourra admettre si besoin.

I. Limites inférieures.

A. Limite inférieure d'une suite.

Pour une suite de réels $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et I un ensemble fini d'entiers naturels, on note $\min_{i \in I} x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i; i \in I\}$. Ainsi, par exemple : $\min_{i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}$.

1. Un exemple : déterminer $\min_{i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $u_n(k) = \min_{i \in \llbracket n, n+k \rrbracket} x_i$.

a. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $(u_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(u_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note alors $u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k)$.

c. Etablir une inégalité entre les réels $u_n(k+1)$ et $u_{n+1}(k)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$).

Cette limite est appelée **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on notera :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

3. Soit les deux suites réelles positives $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n \quad \text{et} \quad z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Expliciter, pour n entier positif et k entier supérieur à 1, les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Déterminer $\liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} z_n$.

4. a. On suppose ici que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs.

Comparer u_n et x_n .

En déduire que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers un réel ℓ , alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

b. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ , alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

c. i. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\alpha_i \in I$. Montrer que $\min_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \alpha_i \in I$.

ii. Démontrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs convergente vers un réel $\ell \geq 0$ alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

B. Limite inférieure d'une fonction.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_x(h) = \min_{t \in [x, x+h]} f(t)$$

5. a. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
b. En déduire que $\varphi_x(h)$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On notera Φ_x cette limite.
c. Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
d. En déduire que Φ_x admet une limite (qui peut valoir $+\infty$) quand x tend vers $+\infty$.
On appelle cette limite **limite inférieure de f** , et on notera : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x$.

- e. Un exemple. Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases} \quad \text{et telle que } f(x) = f(x+2) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(On dit que f est périodique de période 2.)

- i. Représenter graphiquement f sur le segment $[0, 4]$.
ii. Que vaut $\varphi_x(h)$ pour tout $x > 0$ et $h \geq 2$?
iii. En déduire Φ_x puis $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
f. f est de nouveau une fonction quelconque, positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations du début de la partie **I.B.** et de la question **I.B.5.b.**
i. Soit x un réel positif. Montrer que, pour tout $h \geq 0$, $f(x) \geq \varphi_x(h)$.
ii. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi_x \leq f(x)$.
iii. On suppose que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe deux réels $\varepsilon > 0$ et $x_0 > 0$ tels que :

$$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq \varepsilon.$$

- g. Soit f et g deux fonctions positives continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq g(x) \geq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell \text{ avec } \ell \geq 0.$$

Montrer que : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \ell$.

II. Lois sous-exponentielles.

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On notera, sous réserve d'existence, $E(X)$ et $V(x)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X .

Si X est une variable aléatoire réelle positive, de fonction de répartition F , on notera systématiquement $\overline{F}$ la **queue de la répartition** définie par $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{cases} p_X(n) &= P(X = n) \\ p_Y(n) &= P(Y = n) \\ p_{X+Y}(n) &= P(X + Y = n) \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^n p_X(k)p_Y(n-k)$.

On admettra que, si X et Y sont deux variables réelles positives et indépendantes admettant respectivement

pour densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et continues à droite de 0, alors la variable $X + Y$ admet pour densité $(f_X * f_Y)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (f_X * f_Y)(x) = \int_0^x f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable $X + Y$.

7. Soit λ un réel strictement positif, X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On fera le choix : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

a. Expliciter, pour tout x réel positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

b. Calculer $(f * f)(x)$ pour tout $x \geq 0$.

c. En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout $x \geq 0$.

d. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$.

8. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . On dit que X est **à support illimité à droite** si, pour tout réel x positif, $\overline{F}(x) > 0$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition F .

a. Montrer que, pour tout réel x positif :

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \geq P(\max(X, Y) > x).$$

b. Montrer que $P(\max(X, Y) > x) = 1 - F^2(x)$.

c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F^2(x)}{\overline{F}(x)} = 2$

d. En déduire que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$.

Sous les mêmes hypothèses pour X et Y , on dira par la suite que la loi de X est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

9. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles positives, indépendantes, de même loi sous-exponentielle.

a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{[X+Y > x]}(X > x) = \frac{1}{2}$.

b. En utilisant la question 8.c., montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(\max(X, Y) > x)}{P(X + Y > x)} = 1$.

c. Démontrer l'égalité :

$$P(X + Y > x) = P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x]) + P(\max(X, Y) > x).$$

d. Conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x])}{P(X + Y > x)} = 0$$

e. Interpréter le résultat précédent.

III. Problèmes de queues.

A. Lois à queues lourdes.

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-$, et continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit F la fonction de répartition associée.

On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède une **queue lourde** si, pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx$ est divergente, autrement dit si :

$$\forall \lambda > 0, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x)e^{\lambda x} dx = +\infty$$

10. Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que, si la loi de X est à queue lourde, alors elle est à support illimité à droite.

11. Etude de quelques lois particulières.

a. Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

b. Soit f la fonction d'expression $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

i. Montrer que f est une densité de probabilité.

ii. Soit $\lambda > 0$. Justifier l'existence d'un réel $x_0 > 0$ tel que : $\forall x \geq x_0, \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1$.

iii. En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

c. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

i. Déterminer une densité f de X .

ii. Soit $\lambda > 0$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln(x) \right)$?

iii. En déduire qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que : $\forall x \geq x_0, f(x)e^{\lambda x} \geq 1$.

iv. En déduire que la loi de X est à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors

$r(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ et $R(x) = -\ln(\overline{F}(x))$ pour $x > 0$.

12. Montrer que, pour tout $x > 0$: $\overline{F}(x) = \exp \left(- \int_0^x r(y) dy \right)$.

13. On suppose dans cette question que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$.

a. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que, pour tout $x \geq x_0$: $\overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.

b. Soit λ tel que $0 < \lambda < \varepsilon$ et $A > 0$ fixé. Montrer que :

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = 1 - \overline{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \overline{F}(x) dx$$

c. Conclure que $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

14. On admet l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors :

$$\forall \alpha > 0, \quad P(Z > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $c = E(e^{\lambda X})$ existe.

- b. Soit $x > 0$. Montrer que $\overline{F}(x) \leq ce^{-\lambda x}$.
- c. Montrer que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \geq \lambda > 0$.

B. Lois à queues longues.

La condition $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle est suffisante pour avoir cette propriété.

Soit X une variable aléatoire positive à support illimité à droite, de fonction de répartition F . On dit que la loi de X possède **une queue longue** si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$ et tout $y \in [0, 1]$, on ait :

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une telle loi.

15. a. Montrer que, pour tout $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

- b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

- c. Montrer que, pour tout $y \in [0, 1]$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{[X > x]}(X > x+y) = 1$.

- d. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x+1) - R(x) = 0$.

16. F désigne toujours la fonction de répartition d'une variable aléatoire à queue longue.

- a. Soit $\lambda > 0$ fixé.

- i. Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geq x_0$ et tout $y \in [0, 1]$:

$$\overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x)e^{-\lambda/2}.$$

Indication : on utilisera la définition d'une loi à queue longue donnée en début de partie **B** avec une valeur de ε précise que l'on explicitera.

- ii. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0)e^{-n\lambda/2}.$$

- iii. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(x_0+n)}\overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

- b. Justifier que, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- c. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

- d. Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.