

Mathématiques

Concours blanc - épreuve 2 - 8h - 12h

Sujet 1 : type EM Lyon

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad x'(t) = -x(t) + e^{-t}$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1.
 - a. Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$
 - b. Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at + b)e^{-t}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
 - c. Résoudre l'équation différentielle (E)

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \quad \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.
 - a. Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

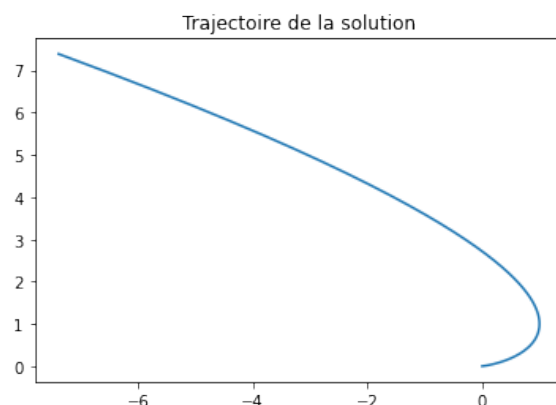
- b. Justifier l'existence d'une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$
 - c. Déterminer cette solution (x, y) en vous aidant de la question 1.
 - d. Etudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$

On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



Partie B : étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. **a.** Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$
 b. Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0
5. **a.** Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
 b. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$

Partie C : étude d'une suite implicite

6. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k
 b. Déterminer explicitement u_1
7. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

8. **a.** Soit $k \geq 1$ un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$

- b.** En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$
9. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$?

Exercice 2

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

Par ailleurs, on pose : $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = f(e_1) + e_1$

Enfin, **on admet le résultat suivant** : deux matrices semblables ont le même spectre (donc les mêmes valeurs propres).

1.
 - a. Calculer v
 - b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
 - c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}
2.
 - a. Etablir le lien entre les matrices A , A' , P et P^{-1}
 - b. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$
 - c. En déduire les valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
 - d. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
3.
 - a. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$
 - b. Montrer : $B^2 = 2B$
 - c. En déduire les valeurs propres de B , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
 - d. La matrice B est-elle diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$

1.
 - a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
 - b. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$
Montrer que M n'est pas inversible (*on pourra raisonner par l'absurde*).
2. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$
 - a. Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et ${}^t A - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
 - b. En déduire que les matrices B et ${}^t A$ admettent une valeur propre en commun, notée α
 - c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre α . On note : $N = X {}^t Y$
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$
 - d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$

Exercice 3

L'entropie en probabilité

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 - a. Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$
 - b. La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
 - c. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h
2. Pour tout x dans $[0; 1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1 - x)$
Dresser le tableau de variations de la fonction g

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'entropie de X est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n h(p_i)$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = P(X = x_i)$

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer $H(U)$
4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.
Démontrer que $H(X) \leq \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2.
5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 , définies sur le même espace probabilisé.
Soit Z la variable aléatoire telle que :
 - $Z(\Omega) = \{0, 1\}$
 - l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.On définit le réel p par : $p = P(Z = 1)$
 - a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
 - b. Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$
 - c. Vérifier que $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$
6. Soit $p \in]0; 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?
 - b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$ (on pourra raisonner par récurrence).
 - c. Démontrer que $H(Z_n) \leq \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f , on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ converge absolument ; **l'entropie** de X est alors :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a; b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$
 - a. Démontrer que U admet une entropie.
 - b. Déterminer $H(U)$
8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f
 - a. Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ et déterminer sa valeur.
 - b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln(\lambda)$
9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X
 - a. Donner l'espérance et la variance de X . En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt$
 - b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$