

Concours blanc - épreuve 2 - sujet 2 : type ESSEC - HEC - sujet ESSEC 2 2015

Eléments de corrigé

Total sur XXX points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

I.A.

1. $\min_{i \in [0,4]} \frac{(-1)^i}{1+i} = -\frac{1}{2}$ 1 point

2. a. $\{x_i, k \leq i \leq k+n\} \subset \{x_i, k \leq i \leq k+n+1\}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\min_{i \in [n, n+k+1]} x_i \leq \min_{i \in [n, n+k]} x_i$ 1 point

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_n(k+1) \leq u_n(k)$: $(u_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b. $(u_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc convergente (théorème de la limite monotone) vers un réel $u_n \geq 0$ 0,5 point

c. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\min_{i \in [n, n+k+1]} x_i \leq \min_{i \in [n+1, n+k+1]} x_i$, donc $u_n(k+1) \leq u_{n+1}(k)$ 1,5 points

Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$: $u_n \leq u_{n+1}$, et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

d. D'après le **théorème de la limite monotone**, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit convergente (si elle est majorée), soit de limite $+\infty$ (sinon). 0,5 point

3. a. et b. : 2 points puis 1 point

• Pour $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$: pour $k \geq 1$ et $n \geq 0$, $\min_{i \in [n, n+k]} y_i = 0$ ($k \geq 1 \Rightarrow$ au moins 2 termes), donc $\liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

• Pour $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$: pour $k \geq 1$, $n \geq 2$, $\min_{i \in [n, n+k]} z_i = 2$, donc $\liminf_{n \rightarrow +\infty} z_n = 2$

4. a. Pour k, n entiers naturels, $u_n(k) = x_n$ 1,5 points

alors $u_{n+k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u_n = x_n$ pour tout n , donc si $x_n \rightarrow \ell$ alors $u_n = x_n \rightarrow \ell = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

b. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, elle converge vers $\ell \geq 0$ 1,5 points

Pour n, k dans $\mathbb{N}$: $u_n(k) = x_{n+k}$ donc $u_n = \ell$ par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, puis la suite (u_n) est alors constante donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

c. (i) : évident, le minimum est un des α_i , il est donc dans I 0,5 point

(ii) : pas du tout évident, il faut revenir à la définition d'une limite (qu'on ne manipule presque jamais)

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ 3 points

Fixons $n \geq n_0$: $\forall k \in \mathbb{N}$ $\ell - \varepsilon \leq x_{n+k} \leq \ell + \varepsilon$ implique $\ell - \varepsilon \leq u_n(k) \leq \ell + \varepsilon$ (cf. (i)).

Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$: $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $u_n \rightarrow \ell$ ce qui signifie :

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$

I.B.

5. a. $x \geq 0$ fixé, si $s \geq t \geq 0$, $[x, x+t] \subset [x, x+s]$ 1 point

donc $\phi_x(s) \leq \phi_x(t)$: $t \mapsto \phi_x(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- b. ϕ_x est décroissante sur $\mathbb{R}$ et positive, donc admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_x(t) = \Phi_x \geq 0$.

0,5 pt

- c. Raisonnement analogue à celui pour les suites 2 points

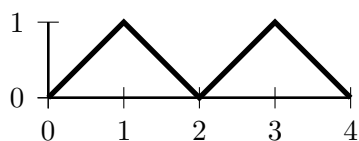
si $x' \geq x \geq 0$, $k = x' - x$, $[x', x' + h] = [x + k, x + k + h] \subset [x, x + h + k]$

donc $\phi_{x'}(h) = \phi_{x+k}(h) \geq \phi_x(h')$, où $h' = h + k$ et en passant à la limite quand $h \rightarrow +\infty$ alors $h' \rightarrow +\infty$ et

$$\Phi_{x'} \geq \Phi(x) : x \mapsto \Phi_x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

- d. D'après le **théorème de la limite monotone**, $x \mapsto \Phi_x$ admet soit une limite finie en $+\infty$ (si elle est majorée), soit $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (sinon). 0,5 point

- e. (i) 1,5 points



- (ii) $\phi_x(h)$ est le minimum sur au moins une période (car $h \geq 2$, donc ici : $\phi_x(h) = 0$ pour $h \geq 2$) 21 point

- (iii) On en déduit $\Phi_x = 0$ donc $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 1 point

f.

- (i) Evident par définition $\phi_x(h)$ est le minimum de f sur $[x, x + h]$ donc entre autres il est plus petit que $f(x)$ 0,5 point

- (ii) Pour $h \geq 0$, $\phi_x(h) \leq f(x)$, donc par passage à la limite quand $h \rightarrow +\infty$: $\Phi_x \leq f(x)$ 1 point

- (iii) Soit $\ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x$ 3 points

- si $\ell = +\infty$, alors d'après la définition d'une limite (avec $A = 1$) :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq x_0, \Phi_x \geq 1.$$

Donc : $\forall x \geq x_0, f(x) \geq \Phi_x \geq 1$ ce qui répond à la question avec $\varepsilon = 1$.

- si $\ell \in]0, +\infty[$, en choisissant $0 < \varepsilon' < \ell$, il existe $x_0 \geq 0$ tel que :

$$\forall x \geq x_0, \Phi_x \geq \ell - \varepsilon'$$

En posant $\varepsilon = \ell - \varepsilon'$, on obtient alors $f(x) \geq \varepsilon$ pour $x \geq x_0$.

D'où le résultat.

- g. On pose $\phi_x(h) = \min_{t \in [x, x+h]} f(t)$, $\psi_x(h) = \min_{t \in [x, x+h]} g(t)$, $\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \phi_x(h)$ et $\Psi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \psi_x(h)$

- Ψ_x a pour limite ℓ quand $x \rightarrow +\infty$ 3 points

En effet, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $x_0 \geq 0$ tel que, pour tout $x \geq x_0$,

$$\ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$$

On en déduit : $\forall h \geq 0, \forall x \geq x_0 : \ell - \varepsilon \leq \psi_x(h) \leq \ell + \varepsilon$ et par passage à la limite : $\forall x \geq x_0, \ell - \varepsilon \leq \Psi_x \leq \ell + \varepsilon$.

On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}_+ \forall x \geq x_0, \ell - \varepsilon \leq \Psi_x \leq \ell + \varepsilon$, ce qui signifie : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_x = \ell$

• $f \geq g$ donc $\phi_x(h) \geq \psi_x(h)$ pour tout $x \geq 0$ et $h \geq 0$. Par passage à la limite quand $h \rightarrow +\infty$:

$$\Phi_x \geq \Psi_x, \text{ puis, par passage à la limite quand } x \rightarrow +\infty : \boxed{\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \ell}.$$

II.

6. $[X + Y = n] = \bigcup_{k=0}^n [X = k] \cap [Y = n - k]$, réunion d'événements incompatibles, donc : 1,5 points

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P([X = k] \cap [Y = n - k]).$$

X et Y étant indépendants :

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) = \sum_{k=0}^n p_X(k)p_Y(n - k)$$

Nota bene : on peut aussi raisonner avec la formule des probabilités totales.

7. a. Pour $x \geq 0$, $\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$ et $\boxed{\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}}$ 1 point

b. Pour $x \geq 0$, $f * f(x) = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(x-t)} dt$ donc $\boxed{f * f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} = \lambda x f(x)}$ 1 point

c. $F_{X+Y}(x) = \lambda^2 \int_0^x t e^{-\lambda t} dt$, par IPP : $F_{X+Y}(x) = -\lambda x e^{-\lambda x} + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$ 1,5 points

et donc $\boxed{F_{X+Y}(x) = 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x)}$

d. $\frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \lambda x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ 1 point

8. a. $[\max(X, Y) > x] \subset [X + Y > x]$, donc $P(\max(X, Y) > x) \leq P(X + Y > x)$ soit :

$$\boxed{P(\max(X, Y) > x) \leq \overline{F_{X+Y}}(x)}$$
 1 point

b. $P(\max(X, Y) > x) = 1 - P(\max(X, Y) \leq x) = 1 - P([X \leq x] \cap [Y \leq x])$ et par indépendance de X et Y , $P(\max(X, Y) > x) = 1 - P([X \leq x])P([Y \leq x])$ 1 point

Comme X et Y ont même loi de fonction de répartition F , $\boxed{P(\max(X, Y) > x) = 1 - (F(x))^2}$.

c. $\frac{1 - F^2}{\bar{F}} = 1 + F$ tend vers 2 en $+\infty$ 1 point

d. D'après le 8.a. : $\frac{\overline{F_{X+Y}}}{\bar{F}} \geq \frac{1 - F^2}{\bar{F}}$ et d'après la question 5.g. : $\boxed{\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq 2}$ 1 point

9. a. $P_{[X+Y>x]}(X > x) = \frac{P([X > x] \cap [X + Y > x])}{P(X + Y > x)} = \frac{P(X > x)}{P(X + Y > x)} = \frac{\bar{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)}$ et d'après la définition

d'une loi sous-exponentielle, $\boxed{P_{[X+Y>x]}(X > x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1/2}$ 1,5 points

b. $\frac{P(\max(X, Y) > x)}{P(X + Y > x)} = \frac{1 - F^2(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)} = \frac{1 - F^2(x)}{\bar{F}(x)} \times \frac{\bar{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{2 \times \frac{1}{2} = 1}$ 1,5 points

- c. $[X + Y > x] = [[X + Y > x] \cap [\max(X, Y) > x]] \cup [[X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x]]$. 1 point
Comme $[X + Y > x] \cap [\max(X, Y) > x] = [\max(X, Y) > x]$, et comme cette réunion est une réunion de deux événements incompatibles :

$$P(X + Y > x) = P(\max(X, Y) > x) + P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x])$$

- d. En divisant par $P(X + Y > x)$ la relation précédente :

1 point

$$1 = \frac{P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x])}{P(X + Y > x)} + \frac{P(\max(X, Y) > x)}{P(X + Y > x)}$$

Comme $\frac{P(\max(X, Y) > x)}{P(X + Y > x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, on obtient bien :

$$\frac{P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x])}{P(X + Y > x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

- e. La relation précédente s'écrit : $P_{[X+Y>x]}(\max(X, Y) \leq x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ qui peut s'interpréter par : sachant $X + Y > x$, quand $x \rightarrow +\infty$ il est quasi-certain d'avoir $X > x$ ou $Y > x$, ce qui paraît naturel, puisque ces événements sont en fait très peu probables. Donc dans le cas « improbable » ou cela arrive, l'autre variable est « négligeable ». 1 point

III.A.

Remarque : comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut aussi dire que :

$$f \text{ est à queue lourde ssi : } \forall x > 0, \forall \lambda > 0, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_x^a f(t) e^{-\lambda t} dt = +\infty.$$

$$\left(\text{en écrivant } \int_x^a f = \int_x^1 f + \int_1^a f \right).$$

10. On raisonne par contraposée : supposons que X ne soit pas à support illimité à droite, alors $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \bar{F}(x_0) = 0$

donc puisque F est croissante et $\bar{F} = 1 - F$ alors $\bar{F}$ est décroissante et de plus positive (car $F(x) \leq 1 \Rightarrow \bar{F}(x) = 1 - F(x) \geq 0$)

alors $\forall t \geq x_0, \bar{F}(t) = 0$, et donc $\forall a, b$ tels que $x_0 \leq a \leq b$, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = \bar{F}(a) - \bar{F}(b) = 0$

or si l'intégrale d'une fonction positive et continue sur un segment est nulle, c'est que la fonction est nulle sur le segment, donc f est nulle sur $[a, b]$ et ce pour tout a, b supérieurs à x_0

donc f est nulle sur $[x_0, +\infty[$ est donc f n'est pas à queue lourde car par exemple $\int_1^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$ converge

et vaut $\int_1^{x_0} f(t) e^{-t} dt$ (on suppose $x_0 \geq 1$ quitte à prendre un autre x_0)

d'où la contraposée du résultat demandé et donc le résultat. 2 points

11. a. Non, car si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$, et si on choisit $0 < \lambda < \mu$, alors :

1 point

$$\int_1^{+\infty} f_X(t) e^{\lambda t} dt = \mu \int_1^{+\infty} e^{(\lambda - \mu)t} dt \quad \text{qui est une intégrale convergente.}$$

- b. (i) $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$

1,5 points

Il reste à montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1

$$\text{Pour } A > 0, \int_0^A f = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A}$$

Par passage à la limite quand $A \rightarrow +\infty$, $\int_0^{+\infty} f$ converge et vaut 1.

Comme enfin f est nulle sur $] -\infty, 0[$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ converge et vaut } 1$$

f est bien une densité de probabilité.

(ii)

$\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\lambda x}}{x^2}$. Des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} = +\infty$
donc, de la définition même d'une limite infinie :

1 point

$$\exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, \quad \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1$$

(iii)

Soit $\lambda > 0$ et x_0 choisi comme dans la question précédente. Soit $A > x_0 > 0$

1 point

$$\int_{x_0}^A f(t)e^{\lambda t} dt \geq \int_{x_0}^A 1 dt \geq A - x_0$$

donc $\int_{x_0}^A f(t)e^{\lambda t} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}$ diverge aussi.

Ceci étant vrai pour tout $\lambda > 0$,

f est à queue lourde.

c. (i)

2 points

On remarque que $X > 0$, donc $P(X \leq 0) = 0$, et, pour $x > 0$, $P(X \leq x) = P(Z \leq \ln(x)) = \Phi(\ln(x))$.

$$\text{Donc } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

F_X est clairement C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0+} F_X(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \Phi(y) = 0 = F_X(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} F_X(x)$.

Donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^*$: X est à densité et on peut choisir pour densité f_X telle que $f_X = F'_X$ sur $\mathbb{R}^*$, par exemple :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \Phi'(\ln(x)) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln^2(x)\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(ii)

$\lambda x - \frac{1}{2} \ln^2(x) - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x - \frac{1}{2} \ln^2(x) - \ln(x) = +\infty$$

0,5 point

(iii)

On rappelle que $1/x = e^{-\ln(x)}$, donc :

1 point

$$f_X(x)e^{\lambda x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\lambda x - \ln(x) - \frac{1}{2} \ln^2(x)\right).$$

D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_X(x)e^{\lambda x} = +\infty$, donc :

il existe un réel x_0 tel que, pour $x \geq x_0$, $f_X(x)e^{\lambda x} \geq 1$

(iv)

0,5 point

Démonstration analogue à la question 11-b-(iii)

12. Pour $x > 0$, $R'(x) = \frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = r(x)$

1 point

Remarque : petit défaut d'énoncé ensuite, on admet que la définition de R est aussi valable en 0 (car $\bar{F}(0) = 1$)

Donc $R(x) - R(0) = \int_0^x r(t)dt$. Comme $\bar{F}(0) = 1$ (car $F(0) = 0$), $R(0) = 0$ donc $R(x) = \int_0^x r(t)dt$

On en déduit : $-\ln(\bar{F}(x)) = \int_0^x r(t)dt$ donc $\bar{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(t)dt\right)$

13. a. D'après la question B-5-f-(iii), partie 1, il existe $\varepsilon > 0$ et $x_0 > 0$ tel que :

1 point

$$\forall x \geq x_0, \quad \frac{R(x)}{x} \geq \varepsilon$$

Donc, pour $x \geq x_0$, $-R(x) \leq -\varepsilon x$ et donc $\bar{F}(x) = \exp(-R(x)) \leq \exp(-\varepsilon x)$.

b. IPP, $-\bar{F}$ étant une primitive de f , et en se souvenant que $\bar{F}(0) = 1$

1 point

c. Pour $A \geq x_0$, $0 \leq e^{\lambda A} \bar{F}(A) \leq e^{(\lambda-\varepsilon)A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ car $\lambda - \varepsilon < 0$

1,5 points

• Convergence de $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx$:

★ $x \mapsto e^{\lambda x} \bar{F}(x)$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$

★ $\forall x \geq x_0, \quad e^{\lambda x} \bar{F}(x) \leq e^{(\lambda-\varepsilon)x}$

★ $\int_{x_0}^{+\infty} e^{(\lambda-\varepsilon)x} dx$ converge, car $\lambda - \varepsilon < 0$

Du théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_{x_0}^{+\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx$ converge.

Enfin, $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx$ converge aussi, car $x \mapsto e^{\lambda x} \bar{F}(x)$ est continue sur $[0, x_0]$

• Conclusion : $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge (et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx = 1 - \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx$)

donc X n'est donc pas à queue lourde.

14. a. X n'étant pas à queue lourde, il existe $\lambda > 0$ tel que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{\lambda t} dt$ converge.

1 point

Les fonctions intégrées sont positives et f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, donc $\int_0^{+\infty} f(t)e^{\lambda t} dt$ converge absolument.

Le théorème de transfert donne donc : $e^{\lambda X}$ admet une espérance

b. $\bar{F}(x) = P(X > x) = P(e^{\lambda X} > e^{\lambda x})$

1 point

L'inégalité de Markov donne finalement le résultat : $\bar{F}(x) \leq \frac{1}{e^{\lambda x}} E(e^{\lambda X})$

c. $-\ln(\bar{F}(x)) \geq \lambda x - \ln(c)$ donc : $\frac{R(x)}{x} \geq g(x) = \lambda - \frac{\ln(c)}{x}$

1 point

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$, $\liminf_{x \rightarrow +\infty} g = \lambda$ et, d'après la question B-5.g., $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \geq \lambda$

Nota bene : la question **5.g.** se base sur les hypothèses de fonctions positives sur $\mathbb{R}_+$, or ici les fonctions ne sont pas définies en 0 et on ne sait pas si g est positive. Comme il s'agit de notions « asymptotiques » (pour $n \rightarrow +\infty$), on admet que le résultat est valable pour des fonctions positives sur $[a, +\infty[$ (ce qui est le cas pour g).

III.B.

15. Remarque (découle de la définition de la limite, pas facile) :

X est à queue longue si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, \forall y \in [0, 1], \left| \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

Ceci implique :

$$\forall y \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, \left| \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

donc que, pour tout $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1$

a. $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} - 1 = \frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ d'après la remarque faite.

b. $\boxed{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x) = F(x) - F(x+y)}$ 0,5 point

donc on a aussi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\bar{F}(x)} = +\infty$ pour tout $y \in [0, 1]$.

c. $P_{[X>x]}(X > x+y) = \frac{P([X > x+y] \cap [X > x])}{P(X > x)} = \frac{P([X > x+y])}{P(X > x)} = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ d'après la question **15 .a.**

d. $\boxed{R(x+1) - R(x) = -\ln \left(\frac{\bar{F}(x+1)}{\bar{F}(x)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$ (propriété du 15a- avec $y = 1$).

16. (i)

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - e^{-\lambda/2}$

Par définition d'une variable à queue longue :

$$\begin{aligned} \exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, \forall y \in [0, 1], \\ 1 + \varepsilon \geq \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \geq 1 - \varepsilon \geq e^{-\lambda/2} \end{aligned}$$

Donc, en particulier : $\boxed{\forall x \geq x_0, \forall y \in [0, 1], \bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)e^{-\lambda/2}}$

(ii)

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\bar{F}(x_0 + n) \geq \bar{F}(x_0)e^{-n\lambda/2}$ »

★ $\mathcal{P}(0)$ est trivial.

★ Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

Alors, du (i) : $\bar{F}(x_0 + n + 1) \geq \bar{F}(x_0 + n)e^{-\lambda/2}$, donc $\bar{F}(x_0 + n + 1) \geq \bar{F}(x_0)e^{-n\lambda/2}e^{-\lambda/2} = \bar{F}(x_0)e^{-(n+1)\lambda/2}$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$

★ Conclusion : on a montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \bar{F}(x_0 + n) \geq \bar{F}(x_0)e^{-n\lambda/2}$

(iii)

En effet, $e^{\lambda(x_0+n)}\bar{F}(x_0+n) \geq \bar{F}(x_0)e^{\lambda x_0}e^{\lambda n/2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\lambda n/2} = +\infty$, d'où le résultat avec le théorème d'encadrement.

17. Elle n'est pas majorée d'après la question précédente (16.a.(iii)).

18. D'abord, on sait que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \geq 0$ car $R \geq 0$.

Supposons que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = \ell > 0$.

De la question 13, on aurait X non à queue lourde.

Des questions 14.a. et 14.b, on aurait $x \mapsto e^{\lambda x}\bar{F}(x)$ majorée pour une certaine valeur $\lambda > 0$.

Donc ceci contredit le résultat de la question 16.b.

Conclusion : $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

19. D'après la question 14.c., si X n'était pas à queue lourde, on aurait $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$

Donc X est à queue longue.