

Concours blanc - épreuve 2 - sujet 1 : type EM Lyon

Corrigé

Total sur 92 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

Exercice 1 - EM Lyon 2024

27 points

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle (E) : $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$
 où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$ 1 point

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x' = -x$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R} : \{t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

- b. Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at + b)e^{-t}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Soient a et b deux nombres réels, on considère la fonction x_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : 1,5 points

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0(t) = (at + b)e^{-t}$$

cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'_0(t) = ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = ae^{-t} - x_0(t) = -x_0(t) + ae^{-t}$$

donc x_0 est solution de (E) si et seulement si $a = 1$ et en particulier

$$x_0 : t \mapsto te^{-t} \text{ est une solution particulière de (E)}$$

- c. Résoudre l'équation différentielle (E) 1 point

D'après le principe de superposition, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x = x_0 + x_1$

où x_0 est une solution particulière, et x_1 est une solution de l'équation homogène

ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R} : \{t \mapsto (t + \lambda)e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

On s'intéresse maintenant au système différentiel : (S) :
$$\begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. a. Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

La matrice A est-elle diagonalisable ? 2 points

En notant $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors $AX(t) = \begin{pmatrix} -x(t) + y(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$

donc avec cette matrice A , le système (S) équivaut à $X'(t) = AX(t)$

Alors, la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, donc A admet -1 pour unique valeur propre

si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ alors } A = P(-I_2)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_2 \text{ ce qui est contradictoire avec la}$$

définition de A donc notre hypothèse est fausse, donc

A n'est pas diagonalisable.

- b. Justifier l'existence d'une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$ 0,5 point

Le système différentiel (S) est linéaire à coefficients constants donc d'après le théorème de Cauchy

(S) admet une unique solution (x, y) telle que $(x(0), y(0)) = (1, 1)$

- c. Déterminer cette solution (x, y) en vous aidant de la question 1. 1,5 points

La fonction y vérifie $y'(t) = -y(t)$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = \lambda e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

de plus, la condition $y(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc $y(t) = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

La fonction x vérifie $x'(t) = -x(t) + y(t)$ soit $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$
donc d'après la question 1. il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = (t + \mu)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

et la condition $x(0) = 1$ donne $\mu = 1$, donc $x(t) = (t + 1)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

finalement $\forall t \in \mathbb{R}, (x(t), y(t)) = ((t + 1)e^{-t}, e^{-t})$

- d. Etudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$ 1,5 points

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ (fonction de référence) donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} + e^{-t} = 0$ car
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0$ par croissances comparées,

de plus $(0, 0)$ est un point d'équilibre, car il s'agit d'une solution constante du système différentiel

d'où finalement lorsque $t \rightarrow +\infty$ (x, y) converge vers l'état d'équilibre $(0, 0)$

3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$

On rappelle que la commande `np.linspace(-2, 10, 200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10 1,5 points

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T = np.linspace(-2, 10, 200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]
plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(...)
plt.show()
```

Par définition une trajectoire est l'ensemble des points $(x(t), y(t))$, que l'on représenter ici pour $t \in [-2, 10]$, il suffit donc de donner les formules trouvées précédemment pour x et y : `x = [(t + 1)*np.exp(-t) for t in T]` et `y = [np.exp(-t) for t in T]` et de représenter ces points avec `plt.plot(x, y)`

Partie B : étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a. Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$ 1 point

En $+\infty$: par produit de limites de référence (puisque $k > 0$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)e^{kx} = +\infty$

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$ (car $k > 0$) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{kx} = 0$ par croissances comparées,

d'où par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{kx} + e^{kx} = 0$

- b. Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0 2 pts

Il faut ici remarquer que $f_1(0) = 1$, donc $u_1 = 0$ par unicité de la solution de l'équation $f_1(x) = 1$

7. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a : $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$ 2 points
En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

Soit $k \geq 1$, on trouve $f_k(0) = 1$ et

$$f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) \exp\left(k \times \frac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) e^{\ln(k)} = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) \times k = \ln(k) + k$$

or $1 \leq k \leq k + \ln(k)$ (car $k \geq 1 \Rightarrow \ln(k) \geq 0$) i.e. $f_k(0) \leq f_k(u_k) \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$ donc $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$

car f_k est croissante sur $\mathbb{R}_+$

enfin, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissances comparées, donc par théorème des gendarmes, on déduit de l'inégalité précédente que la suite (u_k) converge vers 0

Nota bene : on peut aussi utiliser le théorème des valeurs intermédiaires à partir de $f_k(0) \leq k \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$ pour montrer que $f_k(x) = k$ admet une solution sur $\left[0, \frac{\ln(k)}{k}\right]$ qui est donc u_k

Option B pour l'inégalité : par définition $f(u_k) = k$ i.e. $(u_k + 1)e^{ku_k} = k$

or $u_k \geq 0$ et $k \geq 0 \Rightarrow 1 \leq (u_k + 1)$ et donc $1 \leq e^{ku_k} \leq (u_k + 1)e^{ku_k}$ i.e. et $e^{ku_k} \leq k$ puis on compose par $\ln$

8. a. Soit $k \geq 1$ un entier, montrer que : $u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$ 1 point

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par définition $f_k(u_k) = k$ i.e. $(u_k + 1)e^{ku_k} = k$ et les termes étant strictement positifs :

$$\ln(u_k + 1) + \ln(e^{ku_k}) = \ln(k) \text{ soit } ku_k = \ln(k) - \ln(u_k + 1) \text{ d'où } u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$

- b. En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ 1,5 points

$$\text{Pour } k \geq 2, \quad \frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = u_k \times \frac{k}{\ln(k)} \text{ et d'après l'égalité précédente, } u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1 - \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)}$$

or, sachant que (u_k) converge vers 0, par opération (« $\frac{0}{+\infty}$ »), $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)} = 0$

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1, \text{ i.e. } u_k \sim \frac{\ln(k)}{k} \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty$$

9. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$? 1,5 points

La série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente, or si $k \geq 3$ alors $\ln(k) \geq \ln(3) \geq \ln(e)$ (par croissance de $\ln$)

donc $0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ pour tout $k \geq 3$, donc la série $\sum_{k \geq 3} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge par théorème comparaison de séries à

termes positifs et donc $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$ également (N.B. : on peut aussi raisonner en montrant que $\frac{1}{k} = o\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$)

or $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$, donc les séries (à termes positifs) $\sum_{k \geq 1} u_k$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$ sont de même

nature d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, ainsi la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ diverge

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

Par ailleurs, on pose : $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = f(e_1) + e_1$

Enfin, **on admet le résultat suivant** : deux matrices semblables ont le même spectre (donc les mêmes valeurs propres).

1. a. Calculer v

1 point

On a $v = f(e_1) + e_1$ mais, puisque A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la lecture de sa première colonne permet de trouver $f(e_1) = -2e_2 + e_3$

ainsi, $v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$

- b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

1,5 points

Montrons que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est libre, soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tels que $\lambda u + \mu v + \gamma e_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$

alors $\lambda(e_1 - e_2) + \mu(e_1 - 2e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0$ donc $(\lambda + \mu + \gamma)e_1 + (-\lambda - 2\mu)e_2 + \mu e_3 = 0$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ -\lambda - 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \text{ et donc } \lambda = \mu = \gamma = 0$$

ainsi, $\mathcal{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et puisque $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors

$\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

- c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$

2 points

Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}

Par définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour calculer P^{-1} , on peut procéder à un calcul d'inverse on peut aussi utiliser le fait que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et inverser les relations qui définissent u, v et e_1 à partir de (e_1, e_2, e_3) puis

$u = e_1 - e_2$ alors $e_2 = e_1 - u$

et $v = e_1 - 2e_2 + e_3$ d'où $e_3 = v - e_1 + 2e_2 = v - e_1 + 2(e_1 - u) = -2u + v + e_1$

$$\text{d'où } \begin{cases} e_1 = 0 \times u + 0 \times v + 1 \times e_1 \\ e_2 = -u + e_1 \\ e_3 = -2u + v + e_1 \end{cases}$$

ainsi,

$$P^{-1} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a. Etablir le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1} où A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$

1 point

D'après la formule de changement de base, $M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} M_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ donc $A = P A' P^{-1}$

b. **Expliciter** la matrice A'

1,5 points

D'après la question précédente $A = PA'P^{-1}$ donc $P^{-1}AP = P^{-1}PA'P^{-1}P = I_3A'I_3 = A'$ et on

$$\text{calcule : } AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ soit } A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Option B : on peut aussi calculer les images, on trouve $f(u) = 2u$, $f(v) = -v$ et utiliser que par définition de v , $f(e_1) = v - e_1$

c. En déduire les valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

5 points

La matrice A' est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(A') = \{-1, 2\}$

or A et A' sont semblables, donc d'après la propriété de l'énoncé, $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A')$ ainsi $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$

on détermine alors les sous-espaces propres :

• pour $\lambda = -1$ alors pour $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = -X \Leftrightarrow (A + I_3)X = 0_{3,1}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow X \in \{{}^t(z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{donc } E_{-1}(A) = \text{Vect}({}^t(1, -2, 1))$$

• pour $\lambda = 2$ alors pour $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = -X \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0_{3,1}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \{{}^t(-y, y, 0), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{donc } E_2(A) = \text{Vect}({}^t(-1, 1, 0))$$

d. L'endomorphisme f est-il bijectif?

1 point

D'après la question précédente, $0 \notin \text{Sp}(A)$ donc A est inversible et donc par caractérisation f est bijectif

3. a. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$

1 point

On calcule :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= g(1, 0, 0) = (1, 0, -1) = e_1 - e_3 \\ g(e_2) &= g(0, 1, 0) = (1, 2, 1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ g(e_3) &= g(0, 0, 1) = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3 \end{aligned}$$

ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Montrer : $B^2 = 2B$

1 point

Le produit matriciel donne :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2B \text{ donc } \boxed{B^2 = 2B}$$

c. En déduire les valeurs propres de B , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

5 points

D'après 3.b., $B^2 - 2B = 0$ donc $x^2 - 2x$ est un polynôme annulateur de B donc les valeurs propres possibles pour B sont les racines de $x^2 - 2x = x(x - 2)$, ainsi, $\text{Sp}(B) \subset \{0, 2\}$

$$\text{Soit } X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{3,1} \text{ alors } X \in E_0(B) \Leftrightarrow BX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X \in \{{}^t(x \ 0 \ x), x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}({}^t(1 \ 0 \ 1)) \text{ ainsi, } BX = 0_{3,1} \text{ admet des solutions non nulles}$$

donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre, } E_0(B) = \text{Vect}({}^t(1 \ 0 \ 1)) \text{ et } {}^t(1 \ 0 \ 1) \text{ est une base } E_0(B)}$ car il forme

une famille libre de $E_0(B)$ (composée d'un seul vecteur non nul) et génératrice par définition du Vect

$$\text{De même, } X \in E_2(B) \Leftrightarrow BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2x \\ x = y - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X \in \{{}^t(y - z \ y \ z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \Leftrightarrow X \in \{y {}^t(1 \ 1 \ 0) + z {}^t(-1 \ 0 \ 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 0), {}^t(-1 \ 0 \ 1)) \text{ ainsi, } BX = 2X \text{ admet des solutions non nulles donc}$$

$$\boxed{2 \text{ est valeur propre, } E_2(B) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 0), {}^t(-1 \ 0 \ 1)) \text{ et } ({}^t(1 \ 1 \ 0), {}^t(-1 \ 0 \ 1)) \text{ est une base } E_2(B)}$$

car elle forme une famille libre de $E_2(B)$ (composée de deux vecteurs qui sont non proportionnels) et génératrice par définition du Vect

d. La matrice B est-elle diagonalisable ?

2,5 points

$$\text{On pose } D = \text{Diag}(0, 2, 2) \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } Q \text{ est une matrice de passage et elle est donc}$$

inversible. En effet Q contient en colonnes une concaténation de familles libres associées à des valeurs propres distinctes, cette concaténation est donc une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle contient 3 éléments et $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$. De plus

$$BQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } QD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ainsi } BQ = QD \text{ donc } BQQ^{-1} = QDQ^{-1} \text{ i.e. } B = QDQ^{-1} \text{ et donc } \boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$$

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$

4. a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

1,5 points

On montre que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

- $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
- $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ donc $0_3 \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ est donc non vide)
- soit $M, N \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $B(\lambda M + N) = \lambda BM + BN = \lambda MA + NA$ (car $M, N \in \mathcal{E}$)
donc $B(\lambda M + N) = (\lambda M + N)A$ ainsi, $\lambda M + N \in \mathcal{E}$

donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

- b. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$

1,5 points

Montrer que M n'est pas inversible (on pourra raisonner par l'absurde).

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$, on a donc $BM = MA$

supposons que M soit inversible, alors $BM = MA \Rightarrow A = M^{-1}BM$

les matrices A et B sont donc semblables

donc d'après la propriété donnée par l'énoncé A et B ont les mêmes valeurs propres ce que l'on peut écrire $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$ or $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ et $\text{Sp}(B) = \{0, 2\}$

ce qui est donc contradictoire, donc notre hypothèse de départ est fausse

ainsi, si $M \in \mathcal{E}$, alors M n'est pas inversible.

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$

- a. Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et ${}^t(A) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1 point

Le rang étant conservé par transposition, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg}({}^t(A - \lambda I_3)) = \text{rg}({}^tA - {}^t(\lambda I_3)) = \text{rg}({}^tA - \lambda I_3)$$

- b. En déduire que les matrices B et tA admettent une valeur propre en commun, notée α

1 point

On a montré en 2.c et 3.c que $2 \in \text{Sp}(A)$ et $2 \in \text{Sp}(B)$

donc $A - 2I_2$ n'est pas inversible et donc d'après la question précédente, ${}^tA - 2I_2$ non plus (sinon leurs rangs seraient différents), et donc 2 est valeur propre de tA

donc 2 est valeur propre de B et de tA

- c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de tA associé à la valeur propre α . On note : $N = X {}^tY$

3 points

Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$

On a $X \in E_2(B)$ donc $BX = 2X$ et $Y \in E_2({}^tA)$ donc ${}^tAY = 2Y$

alors $BN = BX {}^tY = 2X {}^tY = 2N$ et $NA = X {}^tYA = X {}^t(2Y) = 2X {}^tY = 2N$

donc $BN = NA$ et donc $N \in \mathcal{E}$ reste à montrer que N n'est pas la matrice nulle

$$\text{on pose } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ alors } X {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1 \ y_2 \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$$

comme X et Y sont des vecteurs propres alors ils sont non nuls

donc $\exists i_0 \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, x_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, y_{j_0} \neq 0$ donc $x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$ et donc N n'est pas la matrice nulle

(elle possède au moins un coefficient non nul) ainsi, $N \in \mathcal{E} \setminus \{0_3\}$

- d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$

2,5 points

On sait d'après 3.c que $E_2(B)$ est de dimension 2, soit (X_1, X_2) une base de $E_2(B)$ et $Y \in E_2({}^tA)$

alors d'après la question 5.c. $N_1 = X_1 {}^tY$ et $N_2 = X_2 {}^tY$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{E}$

montrons alors que la famille (N_1, N_2) est libre, soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3$

alors $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3 \Rightarrow \lambda_1 X_1 {}^tY + \lambda_2 X_2 {}^tY = 0_3 \Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) {}^tY = 0_3$

$E_2(B)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, si on pose $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, on a $X \in E_2(B)$ et

$X {}^tY = 0_3$ alors à nouveau d'après la question 5.c que $X = 0$ et donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$

la famille (X_1, X_2) étant une base de $E_2(B)$, elle est en particulier libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ainsi, (N_1, N_2) est une famille libre formée de deux vecteurs de $\mathcal{E}$ et donc $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$

Exercice 3 - L'entropie en probabilité - EM Lyon 2023

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n : $\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$h(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a. Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$

1 point

La fonction h est continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle. De plus, on sait, par croissances comparées, que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$, ce qui montre la continuité de h en 0 (à droite). Finalement h est continue sur $]0, +\infty[$ et en 0

donc h est continue sur $\mathbb{R}^+$

- b. La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

1 point

On étudie la limite du taux d'accroissement en 0 :

pour tout $x > 0$, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{h(x)}{x} = \ln(x)$, or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = -\infty$

donc h n'est pas dérivable en 0

Remarque : sa courbe représentative présente une (demi-)tangente verticale (et vers le bas) en 0

- c. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h

1 point

Par définition de $h(0)$, 0 est déjà un antécédent de 0 par la fonction h . Cherchons maintenant les antécédents strictement positifs

soit $x > 0$, alors $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ car $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Finalement, 0 admet exactement 2 antécédents par la fonction h , qui sont 0 et 1

2. Pour tout x dans $[0; 1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1 - x)$

2,5 points

Dresser le tableau de variations de la fonction g

On peut remarquer au préalable que g est bien définie car, pour tout $x \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $1 - x \in \mathbb{R}^+$

de plus, pour tout $x \in]0; 1[$, on a $x > 0$ et $1 - x > 0$, donc $g(x) = -x \ln(x) - (1 - x) \ln(1 - x)$

ainsi, g est dérivable sur $]0, 1[$ par opérations et composition de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0; 1[$:

$$g'(x) = -\ln(x) - x \times \frac{1}{x} - (-1) \ln(1 - x) - (1 - x) \times \frac{-1}{1 - x} = -\ln(x) - 1 + \ln(1 - x) + 1 = -\ln(x) + \ln(1 - x)$$

donc, pour tout $x \in]0; 1[$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) + \ln(1 - x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(1 - x) \Leftrightarrow x < 1 - x$

par stricte croissance de l'exponentielle $\Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

alors de même, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, de plus,

$$g(0) = -h(0) - h(1) = 0, g(1) = -h(1) - h(0) = 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

enfin, puisque g est continue (addition et composition de fonctions continues), on peut donner son tableau de variations sur $[0, 1]$:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	0	$\ln(2)$	0

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'entropie de X est, sous réserve d'existence :
$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X=x))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :
$$H(X) = - \sum_{i=1}^n h(p_i) \quad \text{où, pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i = P(X = x_i)$$

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ 1,5 points
Déterminer $H(U)$

La variable aléatoire U est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(U = k) = \frac{1}{n}$

d'où par définition,
$$H(U) = - \sum_{k=1}^n h\left(\frac{1}{n}\right) = -nh\left(\frac{1}{n}\right) = -n \times \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est-à-dire :
$$H(U) = \ln(n)$$

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$ 2 points
Démontrer que $H(X) \leq \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2.

La variable aléatoire U est à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$

d'où $H(X) = -\left(h(1-p) + h(p)\right) = g(p)$

or, d'après les variations de g étudiées à la question 2., g admet un maximum sur $[0, 1]$, qui est $\ln(2)$

par conséquent,
$$H(X) \leq \ln(2)$$

de plus, comme g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, pour tout $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(p) < g\left(\frac{1}{2}\right)$, soit $g(p) < \ln(2)$

de même, par stricte décroissance de g sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a $g(p) < \ln(2)$ pour tout $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ainsi, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$, mais $g(p) < \ln(2)$ pour tout $p \in [0; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

finalemt
$$H(X) = \ln(2) \text{ si et seulement si } p = \frac{1}{2}.$$

5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 , définies sur le même espace probabilisé.

Soit Z la variable aléatoire telle que :

- $Z(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par : $p = P(Z = 1)$

- a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$? 0,5 point

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc $X_1 + X_2$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$

- b. Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$

1,5 points

Par définition de Z , $[Z = 1] = ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) \cup ([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1])$

donc par incompatibilité $P(Z = 1) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1])$

puis, par indépendance de X_1 et X_2 , $P(Z = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)$

c'est-à-dire

$$p = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2$$

- c. Vérifier que $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$

1 point

D'après la question précédente :

$$1 - 2p = 1 - 2p_1(1 - p_2) - 2(1 - p_1)p_2 = 1 - (2p_1 - 2p_1p_2) - (2p_2 - 2p_1p_2) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2$$

or, $(1 - 2p_1)(1 - 2p_2) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2$ et on trouve bien

$$1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$$

6. Soit $p \in]0; 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?

1,5 points

La variable S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p elle « compte » donc le nombre de succès lors de cette répétition d'épreuves de Bernoulli, par conséquent,

S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p)

Pour bien faire, on le démontre par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(n) : S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Initialisation : $P(1)$ est vraie car $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie

alors par hypothèse $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, de plus $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$ et d'après le lemme des coalitions, S_n et X_{n+1} sont indépendantes (car S_n est fonction de $X_1, \dots, X_n$ et les variables $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes) donc par propriété $S_n + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p)$ i.e. $S_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ car

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} X_k = S_n + X_{n+1} \text{ i.e. } P(n+1) \text{ est vraie, d'où l'hérédité}$$

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.

- b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$
(on pourra raisonner par récurrence).

4 points

On suit l'indication, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété $Q(n) : 1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$

Initialisation : $1 - 2P(Z_1 = 1) = 1 - 2P(S_1 \text{ est impair}) = 1 - 2P(X_1 \text{ est impair})$ car $S_1 = X_1$ donc $1 - 2P(Z_1 = 1) = 1 - 2P(X_1 = 1) = 1 - 2p = (1 - 2p)^1$ donc $Q(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose que $Q(n)$ est vraie

alors $P(Z_{n+1} = 1) = P(S_{n+1} \text{ est impair}) = P(S_n + X_{n+1} \text{ est impair})$

donc, d'après la (petite) formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $([X_{n+1} = 0], [X_{n+1} = 1])$:

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 1) &= P([S_n + X_{n+1} \text{ est impair}] \cap [X_{n+1} = 0]) + P([S_n + X_{n+1} \text{ est impair}] \cap [X_{n+1} = 1]) \\ &= P([S_n \text{ est impair}] \cap [X_{n+1} = 0]) + P([S_n \text{ est pair}] \cap [X_{n+1} = 1]) \end{aligned}$$

or, comme vu plus haut X_{n+1} est indépendante de $X_1, \dots, X_n$, donc de S_n donc :

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 1) &= P(S_n \text{ est impair})P(X_{n+1} = 0) + P(S_n \text{ est pair})P(X_{n+1} = 1) \\ &= P(Z_n = 1)P(X_{n+1} = 0) + P(Z_n = 0)P(X_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
1 - 2P(Z_{n+1} = 1) &= 1 - 2 \left[\frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} p + \left(1 - \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} \right) (1 - p) \right] \\
&= 1 - 2 \left[\frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} p + \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} (1 - p) \right] \\
&= 1 - \left[(1 - (1 - 2p)^n) p + (1 + (1 - 2p)^n) (1 - p) \right] \\
&= 1 - \left(1 - (1 - 2p)^n \right) p - \left(1 + (1 - 2p)^n \right) (1 - p) \\
&= 1 - p + (1 - 2p)^n p - (1 - p) - (1 - 2p)^n (1 - p) = (1 - 2p)^n p - (1 - 2p)^n (1 - p) \\
&= (1 - 2p)^n (p - (1 - p)) = (1 - 2p)^n (1 - 2p) = (1 - 2p)^{n+1} \text{ ce qui montre } Q(n+1)
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n)$ est vraie

finalement on a montré (par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$

- c. Démontrer que $H(Z_n) \leq \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

1,5 points

La variable aléatoire Z_n suit une loi de Bernoulli, donc, d'après la question 4., on a $H(Z_n) \leq \ln(2)$

et, toujours d'après la question 4., $H(Z_n) = \ln(2) \Leftrightarrow P(Z_n = 1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2P(Z_n = 1) = 1$
 $\Leftrightarrow 1 - 2P(Z_n = 1) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2p)^n = 0$ (question précédente) $\Leftrightarrow 1 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

finalement $H(Z_n) = \ln(2)$ si et seulement si $p = \frac{1}{2}$

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f , on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ converge absolument; l'entropie de X est alors :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a; b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$

- a. Démontrer que U admet une entropie.

1,5 points

La variable aléatoire U a pour densité la fonction f définie par : $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ainsi, $h \circ f$ est nulle en dehors de $[a, b]$ (puisque $h(0) = 0$),

et pour tout $t \in [a, b]$, $h \circ f(t) = \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{1}{b-a} \right) = \frac{-\ln(b-a)}{b-a}$

on en déduit que U admet une entropie car nous sommes ramenés à l'intégrale $\int_a^b \frac{\ln(b-a)}{b-a} dt$ qui converge absolument puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue (constante) sur un segment.

- b. Déterminer $H(U)$

1 point

On finit le calcul débuté à la question précédente :

$$H(U) = \int_a^b \frac{\ln(b-a)}{b-a} dt = \frac{\ln(b-a)}{b-a} \int_a^b 1 dt = \frac{\ln(b-a)}{b-a} (b-a) \text{ et donc } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $H(U) = \ln(b-a)$$$

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f

- a. Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ et déterminer sa valeur.

1 point

On reconnaît l'espérance de la loi exponentielle, or si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors on sait d'après le cours que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est (absolument) convergente et $\int_0^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{\lambda}$

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln(\lambda)$

2,5 points

La variable aléatoire X a pour densité la fonction f définie par : $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ainsi, $h \circ f$ est nulle sur $]0, +\infty[$ (puisque $h(0) = 0$), et pour tout $t \geq 0$, on a :

$$h \circ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t} (\ln(\lambda) - \lambda t) = \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda) - \lambda e^{-\lambda t} \lambda t = \ln(\lambda) f(t) - \lambda t f(t)$$

ainsi, X admet une entropie si l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-\ln(\lambda) f(t) + \lambda t f(t)) dt$ converge absolument. Or,

$\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut 1 (f est une densité de probabilité), et $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$

est (absolument) convergente et vaut $\frac{1}{\lambda}$ (question précédente) donc X admet une entropie :

$$H(X) = \int_0^{+\infty} (-\ln(\lambda) f(t) + \lambda t f(t)) dt = -\ln(\lambda) \int_0^{+\infty} f(t)dt + \lambda \int_0^{+\infty} t f(t)dt$$

$$H(X) = -\ln(\lambda) \times 1 + \lambda \times \frac{1}{\lambda} = -\ln(\lambda) + 1 \text{ ce qui donne bien : } H(X) = 1 - \ln(\lambda)$$

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X

a. Donner l'espérance et la variance de X . En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt$

On sait, d'après le cours que X admet une espérance et une variance et que $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

Ensuite, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt$ est (absolument) convergente puisqu'il s'agit du moment d'ordre 2 de X (qui existe puisque X admet une variance).

de plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt = E(X^2) = V(X) + E(X)^2$ d'après la formule de Kœnig-Huygens

c'est-à-dire : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt = \sigma^2 + m^2$

1,5 points

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$

3 points

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$, d'où

$$\begin{aligned} h \circ f(t) &= \phi(t) \ln(\phi(t)) = \phi(t) \ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \right) = \phi(t) \left[\ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \phi(t) \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \right] = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \phi(t) - \frac{t^2 - 2mt + m^2}{2\sigma^2} \phi(t) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \phi(t) - \frac{1}{2\sigma^2} t^2 \phi(t) + \frac{m}{\sigma^2} t \phi(t) - \frac{m^2}{2\sigma^2} \phi(t) \end{aligned}$$

or, $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut 1 (ϕ est une densité de probabilité), $\int_{-\infty}^{+\infty} t \phi(t)dt$

est (absolument) convergente et vaut m (cf question précédente), et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut $\sigma^2 + m^2$ (cf question précédente)

par conséquent, X admet une entropie et :

$$\begin{aligned}
H(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \phi(t) + \frac{1}{2\sigma^2} t^2 \phi(t) - \frac{m}{\sigma^2} t \phi(t) + \frac{m^2}{2\sigma^2} \phi(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt - \frac{m}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \phi(t) dt + \frac{m^2}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \times 1 + \frac{1}{2\sigma^2} \times (\sigma^2 + m^2) - \frac{m}{\sigma^2} \times m + \frac{m^2}{2\sigma^2} \times 1 \\
&= \frac{\sigma^2 \ln(2\pi\sigma^2) + (\sigma^2 + m^2) - 2m^2 + m^2}{2\sigma^2} = \frac{\sigma^2 \ln(2\pi\sigma^2) + \sigma^2}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2 (\ln(2\pi\sigma^2) + 1)}{2\sigma^2} \text{ ce qui se simplifie en : } \boxed{H(X) = \frac{\ln(2\pi\sigma^2) + 1}{2}}.
\end{aligned}$$