

Corrigé

Total sur XXX points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera l'importation suivante faite :

```
import numpy as np
```

Exercice 1 - Ecricome 2020

XX points

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit a un réel, on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A : étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$

1 point

Pour $a = 1$, on trouve $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $(M - I)^2 = 0$

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M

0,5 point

De la relation $(M - I_3)^2 = 0$, on déduit que $(x - 1)^2$ est un polynôme annulateur de M par conséquent, les valeurs propres de M sont incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme qui ne s'annule qu'en 1

ainsi, la seule valeur propre possible pour M est 1 : $\text{Sp}(M) \subset \{1\}$

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

1,5 points

D'après la question précédente 0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible.

Supposons que M soit diagonalisable (raisonnement par l'absurde), alors 1 étant sa seule valeur propre, M serait alors semblable et donc égale à I_3

pour préciser, on peut alors écrire, avec P une matrice inversible et $D = \text{Diag}(1, 1, 1) = I_3$, $M = PDP^{-1}$ et donc $M = PDP^{-1} = M = PDP^{-1} = I_3$ ce qui n'est pas le cas, d'où la contradiction

donc notre hypothèse de départ est fausse et donc la matrice M n'est pas diagonalisable.

Partie B : étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

2 points

Pour $a = 0$, la matrice M est alors la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et on étudie alors si 1 est valeur propre

en étudiant l'ensemble des solutions $MX = X$ où $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$MX = X \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + z$$

$MX = X \Leftrightarrow X = (y + z, y, z) = (y, y, 0) + (z, 0, z) \Leftrightarrow X = y(1 \ 1 \ 0) + z(1 \ 0 \ 1)$
 en particulier, il existe des solutions non nulles,

donc 1 est bien valeur propre de M et $E_1(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 0), {}^t(1 \ 0 \ 1))$

enfin, la famille $({}^t(1 \ 1 \ 0), {}^t(1 \ 0 \ 1))$ est libre car composée de deux vecteurs non proportionnels et génératrice par définition du Vect

donc $({}^t(1 \ 1 \ 0), {}^t(1 \ 0 \ 1))$ est une base de $E_1(M)$ qui est donc de dimension 2

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

1 point

En notant, C_1, C_2, C_3 les colonnes de M , on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$ les colonnes sont donc liées, de fait le rang de M n'est pas égale à 3 et donc M n'est pas inversible

Option B : on peut aussi réduire M en une matrice triangulaire supérieure dont on trouvera qu'un des coefficients diagonaux est nul.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer les bases des sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3,5 points

M n'étant pas inversible, on sait donc déjà que 1 est valeur propre, puis avec les mêmes notations qu'à la question 4., on résout cette fois $MX = 0_{3,1}$:

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow X = (x, x, x) \Leftrightarrow X = x({}^t(1 \ 1 \ 1))$$

ainsi, $E_0(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 1))$ et $({}^t(1 \ 1 \ 1))$ est une base de $E_0(M)$ car il s'agit d'un vecteur non nul et générateur (comme en 4.)

on pose alors $D = \text{Diag}(0, 1, 1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors P est une matrice de passage et elle est donc

inversible. En effet P contient en colonnes une concaténation de familles libres (car bases des sous-espaces propres) associées à des valeurs propres distinctes, cette concaténation est donc une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle contient 3 éléments et $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$. De plus

$$MP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi $MP = PD$ donc $MPP^{-1} = PDP^{-1}$ i.e. $M = PDP^{-1}$ et donc M est diagonalisable.

Partie C : étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1

On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M

Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E

1,5 points

La famille (u, v, w) étant composée de trois vecteurs de E qui est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre pour pouvoir conclure qu'elle en forme une base

$$\text{soit } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \text{ alors } (L_1 - L_2) \beta = 0 \text{ puis } \alpha = \gamma = 0$$

ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre et $(\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3))$ forme donc une base de E

Remarque : (u, v, w) sont en fait les colonnes de la matrice P de la question précédente (on peut l'utiliser si on l'a remarqué).

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$

0,5 point

Le calcul donne $M^t(1 \ 1 \ 1) = {}^t(a \ a \ a)$ et $M^t(1 \ 0 \ 1) = {}^t(1 \ 0 \ 1)$ soit $f(u) = au$ et $f(v) = v$

Nota bene : on a donc trouvé que a et 1 sont valeurs propres de M et des vecteurs propres associés.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$

0,5 point

On calcule $M^t(1 \ 1 \ 0) = {}^t(a+1 \ 1 \ a) = a^t(1 \ 0 \ 1) + {}^t(1 \ 1 \ 0)$ et donc $f(w) = av + w$ (ou encore $\alpha = a$ et $\beta = 1$)

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T

1 point

Par définition de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (images des vecteurs de la base, décomposées selon cette

$$\text{même base) et ayant obtenu } f(u) = au, f(v) = v, f(w) = av + w, \text{ on peut écrire } T = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Etablir un lien entre les matrices M, T et P une matrice inversible que l'on précisera.

1 point

D'après la formule de changement de base, $M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ et par propriété sur les matrices de passage $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1}$, donc $M = PTP^{-1}$

P est la matrice des vecteurs u, v, w écrits dans la base canonique, on retrouve en fait la matrice P de la question 6. en échangeant les deuxièmes et troisièmes colonnes.

12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrer que $(M - \lambda I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow (T - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$

1,5 points

Erreur d'énoncé : il faut en fait montrer que $(M - \lambda I_3)PX = 0_{3,1} \Leftrightarrow (T - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors puisque $M = PTP^{-1}$

$$(M - \lambda I_3)PX = 0_{3,1} \Leftrightarrow (PTP^{-1} - \lambda I_3)PX = 0_{3,1} \Leftrightarrow PTP^{-1}PX - \lambda PX = 0_{3,1} \Leftrightarrow PTX - \lambda PX = 0_{3,1} \\ \Leftrightarrow P(TX - \lambda X) = 0_{3,1} \Leftrightarrow TX - \lambda X = 0_{3,1} \Leftrightarrow (T - \lambda I_3)X = 0_{3,1} \text{ car } P \text{ est inversible} \\ \text{et donc simplifiable à gauche.}$$

13. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. 4,5 pts

La matrice T étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(T) = \{a, 1\}$ d'après la question 10.

et on déduit de la question précédente que si λ est valeur propre de T alors λ est valeur propre de M car si X est non nul alors PX est non nul également (sinon, P étant inversible, X serait nul aussi)

donc $\text{Sp}(M) \subset \text{Sp}(T) = \{a, 1\}$ et même $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(T) = \{a, 1\}$ d'après la question 8.

on va alors déterminer les sous-espaces propres associés à 1 et a , avec les notations habituelles (et les inconnues invisibles cette fois) :

- pour $\lambda = 1$: $MX = X \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 0 \\ 1-a & a-1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{\frac{1}{a-1}L_2 \text{ car } a \neq 1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (a-1)y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}({}^t(1 \ 0 \ 1))$$

• pour $\lambda = a : MX = aX \Leftrightarrow (M - aI_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & a-1 & -1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & -a & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & a-1 & -1 & 0 \\ 1 & a-1 & -a & 0 \\ 1 & a-1 & -a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & a-1 & -1 & 0 \\ 1 & a-1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)x + (a-1)y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)y = z + (a-2)z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)y = (a-1)z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \text{ car } a \neq 1 \Leftrightarrow X \in \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 1))$$

finalement

les deux sous-espaces propres $E_1(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 0 \ 1))$ et $E_a(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 1))$ sont de dimension 1

(comme vu plus haut, il s'agit d'un Vect composé d'un seul vecteur non nul)

on retrouve donc les vecteurs déjà connus (avec u et v) et il n'y a donc pas de nouveau vecteur propre non proportionnel

Remarque : avec le bon énoncé, on est amené à passer par T pour laquelle il est plus facile de trouver les vecteurs propres : on trouve facilement ${}^t(0 \ 1 \ 0)$ (pour 1) et ${}^t(1 \ 0 \ 0)$ (pour a) ; puis en déduire ceux de M en multipliant par P

Exercice 2

34 points

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$

Partie A : étude d'une fonction d'une variable

1. Etudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$

1 point

Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et

pour tout $t > 0$, $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$ alors $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 1$ (car $t^2 \geq 0$) $\Leftrightarrow |t| \geq 1$ par croissance de la fonction racine

et finalement, puisque $t \geq 0$, $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$ et de même $f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$

ainsi f est (strictement) décroissante sur $]0, 1]$ et (strictement) croissante sur $[1, +\infty[$

de plus d'après les limites de référence : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$

donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$

1 point

D'après la question précédente, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc

d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\left[f(1), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \right[= [2, +\infty[$

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$

3. a. Dresser le tableau de variations de g

1 point

Par propriété g est une bijection de $[2, +\infty[$ vers $\left[g(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right[= [1, +\infty[$ et g possède les mêmes variations que f , donc g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ et $g(2) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
(on peut alors donner le tableau de variations)

- b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$

1 point

Par propriété (vue en première année mais plus au programme), comme f est dérivable, $f^{-1} = g$ est dérivable en tout point $f(t)$ où $f'(t) \neq 0$

or f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$, donc g est dérivable sur $]2, +\infty[$

- c. Soit $y \in [2, +\infty[$

En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$

En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y

2 points

Soit $y \in [2, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$ alors $y = f(t) \Leftrightarrow y = t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow ty = t^2 + 1$ car $t \neq 0 \Leftrightarrow t^2 - ty + 1 = 0$

le discriminant de l'équation polynomiale obtenue est $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 2$

ainsi $y = f(t) \Leftrightarrow t = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ ou $t = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$

les deux solutions obtenues (une seule si $y = 2$) sont bien strictement positives (pour la première car $0 \leq y^2 - 4 < y^2$ donc par stricte croissance de racine $\sqrt{y^2 - 4} < |y| = y$) et $g(y)$ est égal à l'unique solution supérieure ou égale à 1 de $y = f(t) \Leftrightarrow$ pour $t \geq 1, g(y) = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(t)) = t$

or $\sqrt{y^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq \frac{y}{2} \geq 1$ car $y \geq 2$

donc cette solution est l'unique supérieure ou égale à 1 ainsi :

$$g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Partie B : étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout $(x, y) \in U$

1,5 points

On utilise la formule de dérivation d'un produit, et le fait que quand l'on dérive selon x , seuls les deux premiers termes dépendent de x (de manière analogue quand on dérive selon y) :

$$\partial_1 h(x, y) = \left(-\frac{1}{x^2}(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 1\right)(1+y) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+y) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)(1+y)$$

$$\text{de même, } \partial_2 h(x, y) = (1+x) \left(-\frac{1}{y^2}(1+y) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 1\right) = (1+x) \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\right)$$

5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer : (x, y) est un point critique de $h \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$

2 points

Soit $(x, y) \in U$ alors (x, y) est un point critique de h si et seulement si $\nabla h(x, y) = {}^t(0 \quad 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 h(x, y) = 0 \\ \partial_2 h(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)(1+y) = 0 \\ (1+x) \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \stackrel{(1+x \neq 0, 1+y \neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

en « égalisant » les inverses puis en inversant les deux égalités à partir de l'avant dernier système (car x et y sont non nuls).

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b) 1,5 points

Pour $(x, y) \in U$, $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases} \xLeftrightarrow[y \neq 0] \begin{cases} y^3 = 1 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ car la fonction cube est bijective

donc $y^3 = 1 = 1^3 \Leftrightarrow y = 1$; ainsi h admet pour unique point critique le point $(1, 1)$

7. Montrer que h admet une extremum local.

4 points

On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 à partir des résultats de la question 4. :

$$\partial_1 h(x, y) = -x^{-2}(1+y) + \frac{y+1}{y} \text{ donc } \partial_{1,1}^2 h(x, y) = -(-2)x^{-3}(1+y) = \frac{2(1+y)}{x^3} \text{ donc } \partial_{1,1}^2 h(1, 1) = 4$$

$$\text{et de même } \partial_2 h(x, y) = -y^{-2}(1+x) + \frac{x+1}{x} \text{ donc } \partial_{2,2}^2 h(x, y) = -(-2)y^{-3}(1+x) = \frac{2(1+x)}{y^3} \text{ et } \partial_{2,2}^2 h(1, 1) = 4$$

$$\text{et en écrivant } \partial_1 h(x, y) = -\frac{1}{x^2}(1+y) + \frac{y+1}{y} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}y + 1 + \frac{1}{y}$$

$$\text{on trouve } \partial_{1,2}^2 h(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \partial_{1,2}^2 h(x, y) \text{ par théorème de Schwarz et donc } \partial_{1,2}^2 h(1, 1) = -2 = \partial_{1,2}^2 h(1, 1)$$

$$\text{alors la matrice hessienne au point critique est } H = \nabla^2(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \det(H - \lambda I_2) = (4 - \lambda)^2 - (-2)^2 = (\lambda - 4)^2 - 2^2 = (\lambda - 4 - 2)(\lambda - 4 + 2) = (\lambda - 6)(\lambda - 2)$$

donc la matrice hessienne de h au point critique admet deux valeurs propres strictement positives (2 et 6) et h est définie sur un ouvert U donc par propriété,

h admet un minimum local en $(1, 1)$

8. a. Vérifier : $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

1 point

$$\text{Soit } (x, y) \in U, \text{ alors } h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x+y+xy) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + x$$

$$\text{donc } h(x, y) = 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ soit } h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$$

- b. En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U

2 points

D'une part, $h(1, 1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$, donc d'après l'identité de la question précédente,

$$\text{pour tout } (x, y) \in U, h(x, y) - h(1, 1) = f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) - 6$$

or on a montré dans la **Partie A** que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, ainsi f admet un minimum global en 1, c'est-à-dire que pour tout $t > 0, f(t) \geq f(1) = 2$

et donc, puisque $x > 0, y > 0$ et $\frac{x}{y} > 0$, alors $f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$

ainsi, $h(x, y) - h(1, 1) \geq 6 - 6 = 0$ et on a donc montré que pour tout $(x, y) \in U, h(x, y) \geq h(1, 1)$

autrement dit h admet un minimum global sur U en $(1, 1)$

Partie C : étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n)$

9. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$

1,5 points

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: u_n existe et $u_n \geq 1$

Initialisation : u_1 est bien défini d'après l'énoncé et $u_1 = 1 \geq 1$ donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie i.e. u_n est bien défini et $u_n \geq 1$
alors $n \geq 1$ et $u_n \geq 1 \Rightarrow nu_n \geq 1$ et f est bien définie sur $[1, +\infty[$, donc $f(nu_n)$ est bien défini, par
conséquent $u_{n+1} = \frac{1}{n}f(nu_n)$ est bien défini

par ailleurs $u_n > 0$ et $n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$ par hypothèse de récurrence
la propriété est donc démontrée au rang $n + 1$ d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \text{ existe et } u_n \geq 1$

10. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n 1,5 points

```
def suite(n)
    u = 1
    for k .....
    :
        u = .....
    return .....
```

Du classique si ce n'est que la formule de u_n dépend de $n - 1$ (car celle de u_{n+1} dépend de n), donc on commence la boucle à 2 (si on demande $\text{suite}(1)$, la boucle ne s'exécutera pas) et on complète avec **for k in range(2,n+1)** puis **u = u + 1/((k-1)**2*u)** (on pourrait aussi définir f) et enfin **return u**

11. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$

- a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$ 1 point

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 u_n} \text{ et donc } v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0 \text{ car } u_n \geq 0$$

par ailleurs, $u_n \geq 1$ d'après la question 8. donc par décroissance de la fonction inverse :

$$\frac{1}{u_n} \leq 1 \text{ puis } \frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2} \text{ i.e. } v_n \leq \frac{1}{n^2}; \text{ finalement on a montré que } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$$

- b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ 1 point

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), donc par

théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge}$$

- c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ 2 points

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

$$\text{Soit } n \geq 2 \text{ un entier, } \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 = u_n - 1 \text{ par télescopage}$$

ainsi $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$, or la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge donc la suite de ses sommes partielles converge, par

conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ

12. a. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$ 1,5 points

Soit $k \geq 2$ un entier

la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, donc pour tout $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$

ainsi par croissance de l'intégrale ($a < b$),

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}$$

- b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire : $0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$

Soient n et p des entiers tels que $2 \leq p < n$, à nouveau par télescopage :

2 points

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \text{ donc } \sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p$$

d'autre part en combinant les inégalités des questions 10.a. et 11.a.,

$$\text{pour tout entier } k \geq 2, 0 \leq v_k \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \text{ donc } 0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{donc en sommant ces encadrements pour } k \in \llbracket p, n-1 \rrbracket : 0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{et par relation de Chasles } \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt = \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt \quad \text{d'où } 0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

- c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$

2 points

Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$

En particulier pour $p = 2$ et $n \geq 3$, l'encadrement précédent donne :

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1 \text{ ainsi } u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$$

et par définition $u_2 = u_1 + \frac{1}{1 \times u_1} = 2$ car $u_1 = 1$ et donc on a $u_n \in [2, 3]$ et ceci pour tout $n \geq 3$

donc par passage à la limite dans l'inégalité (quand $n \rightarrow +\infty$), on en déduit $\ell \in [2, 3]$

- d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$

2 points

Soit $p \geq 2$ fixé et $n > p$ un entier, d'après la question 11.b. $0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$

$$\text{et par ailleurs } \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{p-1}$$

ainsi $0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}$ et donc à nouveau par passage à la limite dans l'inégalité, (quand n tend vers

$$+\infty), \text{ on obtient } 0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$

- e. En déduire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

1,5 points

Si on choisit p tel que $\frac{1}{p-1} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $p \geq 10001$, alors d'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leq \ell - u_p \leq 10^{-4}$ et u_p constitue une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Ainsi la fonction suivante convient :

```
def approx() :
    return suite(10001)
```

Variante sans calculer explicitement le rang p à partir duquel u_p , une boucle **while** qui fonctionne « tant que » le seuil de précision (10^{-4}) n'est pas atteint (on utilise donc toujours l'encadrement) :

```
def approx() :
    p = 2
    while 1/(p-1) >= 0.0001:
        p = p+1
    return suite(p)
```