

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera l'importation suivante faite :

```
import numpy.random as rd
```

Questions indépendantes

1. Énoncer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire X
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z à déterminer.
3. Soit S_n une variable aléatoire telle que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
 - a. Justifier que S_n peut s'écrire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
 - b. Déterminer S_n^* et justifier que S_n^* peut être approchée par la loi normale centrée réduite.
 - c. Déterminer une loi normale permettant d'approcher S_n
4. On exécute le programme ci-contre. Expliquer son fonctionnement et le résultat que l'on peut attendre, on justifiera.

```
def simulation(N,p) :  
    c=0  
    for i in range(1,N+1):  
        c=c+rd.binomial(1,p)  
    return c/N  
  
simulation(1000, 1/3)
```

Exercice

Un institut de sondage a été missionné pour estimer la proportion p de végétariens en France. Il interroge pour cela n français(es).

Puisque le choix des sondé(e)s s'effectue sur une population très grande, on admet que l'expérience peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de végétariens sondés et on souhaite quantifier à quel point la fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ approche la proportion p

1. Déterminer la loi de X_n
2. En considérant la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$
3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$
4. En déduire une condition sur n pour que F_n soit une approximation de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%