
Mathématiques - 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.

Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera l'importation suivante faite :

```
import numpy as np
```

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit a un réel, on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A : étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer les bases des sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1

On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M

Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E
8. Calculer $f(u)$, $f(v)$
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T
11. Etablir un lien entre les matrices M, T et P une matrice inversible que l'on précisera.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrer que $(M - \lambda I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow (T - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$
13. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

Partie A : étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$
Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$

3.
 - a. Dresser le tableau de variations de g
 - b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$
 - c. Soit $y \in [2, +\infty[$
En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$
En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y

Partie B : étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y)$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout $(x, y) \in U$
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer :
$$(x, y) \text{ est un point critique de } h \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$
6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b)
7. Montrer que h admet une extremum local.
8.
 - a. Vérifier : $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$
 - b. En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U

Partie C : étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n)$$

8. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$
9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n

```
def suite(n)
    u = 1
    for k ..... :
        u = .....
    return
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$

b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$

c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. a. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$

b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$

d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$

e. En déduire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.