

## TD 13 - probabilités : convergence, approximation et estimation

## Des éléments de corrigé pour le problème final

## Exercice 10

## Partie A.

1)  $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  (loi uniforme discrète). Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}(X_k = j) = \frac{1}{n}$ .

$$\mathbf{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}.$$

- 2) a)  $T_n$  peut prendre la valeur 1 si on pioche la boule  $n$  au premier rang, et peut prendre la valeur maximale  $n$  si on pioche  $n-1$  fois la boule 1 lors des  $n-1$  premiers tirages (peu importe le  $n$ -ième tirage).

Entre les deux,  $T_n$  peut prendre n'importe quelle valeur :  $T_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

b)  $\mathbf{P}(T_n = 1) = \mathbf{P}(X_1 = n) = 1/n$

- c)  $[T_n = n]$  correspond à  $n-1$  tirage de 1 lors des  $n-1$  premiers tirages :

$$[T_n = n] = [X_1 = 1] \cap \dots \cap [X_{n-1} = 1], \text{ donc, par indépendance : } \mathbf{P}(T_n = n) = \underbrace{\frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ fois}} :$$

$$\mathbf{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

- 3)  $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$ ,  $\mathbf{P}(T_2 = 1) = 1/2$  et  $\mathbf{P}(T_2 = 2) = 1/2$  (questions précédentes).

- 4)  $T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathbf{P}(T_3 = 1) = 1/3$  et  $\mathbf{P}(T_3 = 3) = 1/9$  des questions précédentes, donc :

|                       |     |     |     |
|-----------------------|-----|-----|-----|
| $k$                   | 1   | 2   | 3   |
| $\mathbf{P}(T_3 = k)$ | 1/3 | 5/9 | 1/9 |

$$\mathbf{E}(T_3) = \frac{1}{3} + \frac{10}{9} + \frac{3}{9} = \frac{16}{9}$$

## Partie B.

5)  $X_i(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  donc  $S_k(\Omega) = \llbracket k, nk \rrbracket$ .

6) a)  $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ .

- b) Pour  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} \mathbf{P}(S_k = j) \mathbf{P}_{S_k=j}(X_{k+1} = i - j) = \sum_{j=k}^{nk} \mathbf{P}(S_k = j) \mathbf{P}(X_{k+1} = i - j)$$

car les variables  $X_{k+1}$  et  $S_k$  sont indépendantes (d'après le lemme des coalitions pour bien faire puisque  $S_k$  est fonction des  $X_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $k$  indépendants mutuellement de  $X_{k+1}$ ).

$\mathbf{P}(X_{k+1} = i - j) = 0$  si  $i - j < 1$  ou  $i - j > n$ , et  $\mathbf{P}(X_{k+1} = i - j) = 1/n$  sinon.

En particulier :  $\mathbf{P}(X_{k+1} = i - j) = 0$  pour  $j > i - 1$ , et donc, on peut écrire :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathbf{P}(S_k = j) \mathbf{P}(X_{k+1} = i - j)$$

Enfin, comme on a choisi  $k+1 \leq i \leq n$ , pour tout  $j$  tel que  $k \leq j \leq i-1$ ,  $1 \leq i-j \leq n-k < n$ , donc :

$$\forall j \in \{k, \dots, i-1\}, \quad \mathbf{P}(X_{k+1} = i - j) = 1/n$$

et donc :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbf{P}(S_k = j).$$

7) a)  $\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$

b) Comme nous l'avons vu en cours, on peut montrer l'égalité avec une somme télescopique (en prenant garde à la formule de Pascal pour  $j = k$  qui ne rentre pas dans le cadre de la question précédente)

Option B : une preuve par récurrence sur  $i$  pour  $k$  fixé.

On pose les phrases de récurrence, pour  $i \geq k+1$  :

$$\mathcal{P}_i : \ll \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k} \gg$$

$\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie car s'écrit :  $\binom{k-1}{k-1} = \binom{k+1-1}{k} = 1$ .

Supposons que, pour une valeur  $i \geq k+1$ ,  $\mathcal{P}_i$  soit vraie.

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^i \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{i}{k} && \text{(formule de Pascal)} \end{aligned}$$

et donc  $\mathcal{P}_{i+1}$  est vraie, d'où le résultat par récurrence.

c) •  $\mathcal{H}_1 : \ll \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(S_1 = i) = \mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n} \gg$  est vrai.

• Supposons que, pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{H}_k$  soit vraie et montrons que  $\mathcal{H}_{k+1}$  l'est aussi.

D'après la question 6b), pour  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$  :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbf{P}(S_k = j)$$

De l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1}$$

Donc :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k}$$

et donc  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie. D'où le résultat.

8) a)  $[T_n > k]$  signifie que la somme des nombres ne dépasse pas  $n$  avant le rang  $k+1$ , donc que la somme des  $k$  premiers nombres est inférieure à  $n$ , et donc  $[T_n > k] = [S_k \leq n-1]$ .

$$\text{b) } \mathbf{P}(T_n > k) = \mathbf{P}(S_k \leq n-1) = \sum_{i=k}^{n-1} \mathbf{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1}.$$

Toujours avec la formule du 7b :

$$\mathbf{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

9) En remarquant que  $\mathbf{P}(T_n = k) = 0$  pour  $k > n$ , on peut écrire :

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(T_n = k)$$

D'autre part :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(T_n = k) = \mathbf{P}(T_n > k-1) - \mathbf{P}(T_n > k)$  donc :

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(T_n > k)$$

En faisant le changement d'indices  $j = k-1$  dans la première somme et en remarquant que, pour la deuxième somme :  $\sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(T_n > k) = \sum_{j=0}^{n-1} j \mathbf{P}(T_n > j)$  (on a ajouté un premier terme nul, et on a enlevé le dernier terme qui était nul aussi :  $\mathbf{P}(T_n > j) = 0$  pour  $j > n$ )

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \mathbf{P}(T_n > j) - \sum_{j=0}^{n-1} j \mathbf{P}(T_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1-j) \mathbf{P}(T_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}(T_n > j)$$

donc

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}(T_n > j).$$

On en déduit, avec la formule du binôme de Newton :

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-1-k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$10) \mathbf{E}(T_n) = \exp((n-1) \ln(1 + 1/n)).$$

$\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$  (équivalents usuels) donc  $(n-1) \ln(1 + 1/n) \sim 1$ , et donc :

$$\mathbf{E}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

**Partie C.**

11) a) On se souvient que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ , série convergente, donc.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1$$

b)  $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!}$  sous réserve de convergence (absolue).

Cette somme s'écrit aussi :  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ . Donc  $Y$  admet une espérance et

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = e}.$$

12) Question de cours sur la convergence en loi de  $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$  vers  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Question type Essec.

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}.$$

Le numérateur contient  $k$  facteurs tous équivalents à  $n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc :

$$\binom{n-1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

$$\text{et donc } \mathbf{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!}.$$

13) Précision pour la rédaction, liée au fait que  $T_n(\Omega)$  est fini alors que  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Comme on cherche la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on peut se placer dans le cas où  $n$  dépasse  $k$

soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > k$  alors puisque  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

on a  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $k-1 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  donc on peut appliquer la formule de la question 8.b.

$\mathbf{P}(T_n = k) = \mathbf{P}(T_n > k-1) - \mathbf{P}(T_n > k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} = \mathbf{P}(Y = k)$ , donc, par définition,  $T_n$  converge en loi vers  $Y$ .

14)

```
def T(n):
    S=0
    y=0
    while S<n :
        tirage=rd.randint(1, n+1)
        S += tirage
        y += 1
```

15) a) `freq` renvoie un tableau contenant les fréquences d'apparition de  $[T = 1], [T = 2], \dots [T = n]$  sur 100 000 tirages, ce qui représentera des approximations de  $\mathbf{P}(T = 1), \dots \mathbf{P}(T = n)$  d'après la loi des grands nombres.

Sur les graphiques, ces valeurs sont représentées par des barres.

`loi` contient les valeurs de  $\mathbf{P}(Y = 1), \dots \mathbf{P}(Y = n)$ . Sur les graphiques, ces valeurs sont représentées par des croix ( $\times$ ).

b) Si on suppose que 100 000 est une taille d'échantillon suffisante pour confondre le tableau de `freq` en fréquence avec  $\mathbf{P}(T = 1), \dots$ , plus  $n$  augmente, plus les valeurs de  $\mathbf{P}(T = k)$  se rapproche de  $\mathbf{P}(Y = k)$  : c'est la convergence en loi qui est illustrée.