

Problème

Partie 1

1. $h_{\alpha,\beta}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et positive. Reste à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\alpha,\beta}(t)dt$.

On pose le changement de variable $x = \frac{t-\alpha}{\beta}$ pour avoir : $dt = \beta dx, t \rightarrow -\infty \iff x \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty \iff$

$x \rightarrow +\infty$, et donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\alpha,\beta}(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$

Par parité : $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ (densité de la loi $\mathcal{E}(1)$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\alpha,\beta}(t)dt = 1$.

2. $G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$. On remarquera que G est C^1 sur $\mathbf{R}$ car g est C^0 .

3. a. Posons $Z = \beta Y + \alpha, \forall x \in \mathbf{R}, F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leq x) = G\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$.

Par composition, F_Z est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, donc Z est à densité.

Une densité de Z est donnée par : $\forall x \in \mathbf{R}, f_Z(x) = F'_Z(x) = \frac{1}{\beta}g\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = h_{\alpha,\beta}$

et donc $Z \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, \beta)$

- b. i. Pour $r \in \mathbf{N}^*, Y$ admet un moment d'ordre r ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{-|x|} dx$ converge (convergence absolue).

$x \mapsto |x|^r e^{-|x|}$ étant paire, Y admet un moment d'ordre r ssi $\int_0^{+\infty} x^r g(x)dx$ converge.

$x \mapsto x^r g(x)$ est une fonction positive, continue et $x^r g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $x^{r+2}e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge par le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. Et donc Y admet un moment à tout ordre.

- ii. $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^0 xg(x)dx + \int_0^{+\infty} xg(x)dx = 0$ car $x \mapsto xg(x)$ est impaire.

$\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \mathbf{E}(T^2)$ avec $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Donc $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx = \frac{1}{2}(\mathbf{V}(T) + \mathbf{E}(T)) = 1$ et, comme $x \mapsto x^2 g(x)$ est paire,

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx = \mathbf{E}(Y^2) = 2$.

Enfin $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = 2 - 0 = 2$

- iii. $m_r(Y) = 0$ pour $r \in \mathbf{N}, r$ impair, car $x \mapsto x^r g(x)$ est impaire.

Pour r pair, $m_r(Y) = \int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$.

On montre par récurrence, en utilisant une IPP, que $m_r(Y) = r!$

- c. En posant $Z = \beta Y + \alpha, \mathbf{E}(Z) = \beta \mathbf{E}(Y) + \alpha = \alpha$ par linéarité, et $\mathbf{V}(Z) = \beta^2 \mathbf{V}(Y) = 2\beta^2$

4. a. $G' = g > 0$ sur $\mathbf{R}$: G est strictement croissante et continue, donc, d'après le théorème de la bijection, bijective de $\mathbf{R}$ vers $G(\mathbf{R}) =]0, 1[$

b. $G(x) = 1/2 \iff x = 0$

c. Pour $x \in \mathbf{R}_-$ $G(-x) = 1 - \frac{1}{2}e^x$ et $1 - G(-x) = \frac{1}{2}e^x$, donc $G(-x)(1 - G(-x)) = G(x)(1 - G(x))$

d. On résout $y = G(x)$ en séparant le cas $y < 1/2$ donc ($x < 0$) et $y \geq 1/2$ (donc $x \geq 0$).

e. $\mathbf{P}(G^{-1}(U) \leq x) = \mathbf{P}(U \leq G(x)) = G(x)$ car $G(x) \in]0, 1[$, donc $F_Y(x) = G$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 1)$.

f. i. def InvG(x):
 if x<1/2 and x>0:
 return np.log(x)
 elif x<1 and x>=0.5:
 return -np.log(2*(1-x))

ii. def Laplace(alpha, beta):
 u=rd.rand()
 # normalement 0<u<1 mais...
 while u==0:
 u=rd.rand()
 return beta*InvG(u)+alpha

5. a. g_n est continue et positive sur $\mathbf{R}$. $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)e^{-n|x|}dx$ converge absolument car $|xg(x)e^{-n|x|}| \leq |x|g(x)$ et $\mathcal{L}(0, 1)$ admet une espérance.

Or $x \mapsto xg(x)e^{-n|x|}$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)e^{-n|x|}dx = 0$.

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)e^{-n|x|}dx = 1$.
 g_n est une densité de probabilité.

b. Pour $x \in \mathbf{R}$:

$$|G_n(x) - G(x)| = \left| \int_{-\infty}^x g_n(t)dt - \int_{-\infty}^x g(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^x |g_n(t) - g(t)| dt = \int_{-\infty}^x |t|g(t)e^{-n|t|}dt$$

Pour $t \in \mathbf{R}$, en posant $z = |t| \in \mathbf{R}_+$, $|t|e^{-n|t|} = ze^{-nz}$

On étudie $\varphi : z \mapsto ze^{-nz}$ sur $\mathbf{R}_+$ pour trouver que φ atteint son maximum en $z = 1/n$ qui vaut

$$\varphi(1/n) = \frac{1}{ne} \text{ donc } |t|e^{-n|t|} \leq \frac{1}{ne} \text{ pour } t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{On en déduit : } \int_{-\infty}^x |t|g(t)e^{-n|t|}dt \leq \frac{1}{ne} \int_{-\infty}^x g(t)dt = \frac{1}{ne}G(x)$$

c. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$ donc $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable suivant $\mathcal{L}(0, 1)$

Partie III. A.

11. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = G(x - \theta)$

12. a. $X_1, \dots, X_{2n+1}$ sont mutuellement indépendantes.

b. $S_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, F(x))$ avec $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.

$$\mathbf{E}(S_{2n+1}) = (2n+1)F(x) \text{ et } \mathbf{V}(S_{2n+1}) = (2n+1)F(x)(1 - F(x))$$

13. Pas de difficulté.

Partie III-B.

On remarquera que $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} \widehat{Z}_i$ avec $\widehat{Z}_i$ la variable aléatoire de Bernoulli telle que $\mathbf{P}(\widehat{Z}_i = 1) = \mathbf{P}(\widehat{X}_i \leq x)$

et :
$$\begin{aligned} [\widehat{Z}_k = 1] &= [\widehat{Z}_1 = 1] \cap \dots \cap [\widehat{Z}_k = 1] \\ [\widehat{Z}_k = 0] &= [\widehat{Z}_k = 0] \cap \dots \cap [\widehat{Z}_{2n+1} = 0] \end{aligned}$$

14. a. D'après la remarque précédente, S_{2n+1} est le plus grand indice k tel que $[\hat{Z}_k = 1]$ s'il existe, et $S_{2n+1} = 0$ sinon.

Donc $[\hat{Z}_{n+1} = 0] = [S_{2n+1} \leq n]$ et $[\hat{Z}_{n+1} = 1] = [\hat{X}_{n+1} \leq x] = [S_{2n+1} \geq n+1]$

b. On en déduit : $\hat{F}_{n+1}(x) = \mathbf{P}(S_{2n+1} \geq n+1) = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} F(x)^j (1-F(x))^{2n+1-j}$

15. a. Calcul.

- b. On remarque que $\hat{X}_{n+1}$ est à densité car $\hat{F}_{n+1}$ est C^1 sur $\mathbf{R}$ en tant que somme de fonctions C^1 .

Une densité de $\hat{X}_{n+1}$ est alors $\hat{f}_{n+1} = (\hat{F}_{n+1})'$ donc pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n+1}(x) &= \sum_{j=n+1}^{2n+1} j \binom{2n+1}{j} f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{2n+1-j} \\ &\quad - \sum_{j=n+1}^{2n+1} (2n+1-j) \binom{2n+1}{j} f(x) F(x)^j (1-F(x))^{2n-j} \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n+1} j \binom{2n+1}{j} f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{2n+1-j} \\ &\quad - \sum_{j=n+1}^{2n} (2n+1-j) \binom{2n+1}{j} f(x) F(x)^j (1-F(x))^{2n-j} \end{aligned}$$

car le terme en $2n+1$ est nul dans la deuxième somme.

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=n+1}^{2n+1} j \binom{2n+1}{j} f(x) F(x)^{j-1} (1-F(x))^{2n+1-j} \\ &\quad - \sum_{j=n+1}^{2n} (j+1) \binom{2n+1}{j+1} f(x) F(x)^j (1-F(x))^{2n-j} \end{aligned}$$

Changement de variables $k = j+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n+1}(x) &= \sum_{k=n}^{2n} (k+1) \binom{2n+1}{k+1} f(x) F(x)^k (1-F(x))^{2n-k} \\ &\quad - \sum_{j=n+1}^{2n} (j+1) \binom{2n+1}{j+1} f(x) F(x)^j (1-F(x))^{2n-j} \\ &= (n+1) \binom{2n+1}{n+1} f(x) F(x)^n (1-F(x))^n \end{aligned}$$

car tous les autres termes se simplifient

$$\hat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \times (n+1) f(x) F(x)^n (1-F(x))^n$$

$$\hat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} f(x) F(x)^n (1-F(x))^n$$

- c. Pour $x \in \mathbf{R}$, $\hat{G}_{n+1}(x) = \hat{F}_{n+1}(x + \theta)$, donc $\hat{g}_{n+1}(x) = \hat{f}_{n+1}(x + \theta)$ (en dérivant).

En remplaçant dans l'expression précédente, et en remarquant que $F(x + \theta) = G(x)$ et $f(x + \theta) = g(x)$, on obtient immédiatement le résultat.

- d. Notons que $\hat{X}_{n+1}$ admet une espérance, car par exemple $|\hat{X}_{n+1}| \leq |X_1| + \dots + |X_{2n+1}|$ et tous les X_i admettent une espérance.

$x \mapsto G(x)(1-G(x))$ est paire, g aussi, donc $\hat{g}_{n+1}$ aussi, et donc $x \mapsto x\hat{g}_{n+1}(x)$ est impaire.

Donc $\mathbf{E}(\hat{X}_{n+1} - \theta) = 0$ et $\hat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais de θ

16. a. Si $\hat{H}_{n+1} = \sqrt{2n+1} (\hat{X}_{n+1} - \theta)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{P}(\hat{H}_{n+1} \leq x) = \hat{G}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$

On en déduit que $x \mapsto \mathbf{P}(\hat{H}_{n+1} \leq x)$ est C^1 par composition, et donc $\hat{H}_{n+1}$ est à densité et de densité (en dérivant sa fonction de répartition) : $\hat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \hat{g}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$

b.

c. $G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x/\sqrt{2n+1}}$ donc

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2n+1}} + \frac{x^2}{2(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2n+1}} - \frac{x^2}{4(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En élevant au carré : $G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{4} + \frac{x}{2\sqrt{2n+1}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et par différence :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

- d. On pose $u_n = 4 \left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \right]$.

$$4^n \left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \right]^n = u_n^n = \exp(n \ln(u_n))$$

De la question précédente, $\ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2n} + o(1/n)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2n}$, donc $n \ln(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -x^2/2$ et

donc : $u_n^n = 4^n \left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \right]^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-x^2/2}$

e. $\hat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{u_n^n}{4^n} g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

De la question précédente, en remarquant que $g(0) = 1/2$:

$$\hat{h}_{n+1}(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{e^{-x^2/2}}{4^n} \times \frac{1}{2} \sim \frac{2n+1}{2\sqrt{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} e^{-x^2/2}$$

Enfin $\frac{2n+1}{2\sqrt{2n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ et $\binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}$ donnent :

$$\hat{h}_{n+1}(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

17. Classique. Pour $a > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{2n+1}(\hat{X}_{n+1} - \theta) \in [-a, a]\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Or $\mathbf{P}\left(\sqrt{2n+1}(\hat{X}_{n+1} - \theta) \in [-a, a]\right) = \mathbf{P}(\theta \in [I_n, J_n])$ et, pour $a = 1,96$, $2\Phi(a) - 1 = 0,95$, donc $\mathbf{P}(\theta \in [I_n, J_n]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,95$. Cela signifie que $[I_n, J_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre θ au niveau de confiance de 0,95