

Exercice 1

Partie A : Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$

1.
 - a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.
2. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B : Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $f(x) = x e^{1/x}$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$
5. Soit $x > 0$
 - a. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.
 - b. En déduire que : $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$

6. Soit $x \geq 1$

a. Etablir séparément les inégalités suivantes : $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$

b. En déduire que : $\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$
8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9.

- a. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$

b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

10.

- a. À l'aide de l'encadrement (*) montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir : $n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$,
puis $1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n)$

11.

- a. Justifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$

b. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

12. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$