

Corrigé

Exercice 1

1. a. On raisonne par récurrence :

Initialisation : par définition $u_0 = 1 > 0$, la propriété est initialisée.

Hérédité : supposons $u_n > 0$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence et $e^{1/u_n} > 0$ par positivité de l'exponentielle, par suite

$$u_{n+1} = u_n e^{1/u_n} > 0.$$

Ceci montre que la propriété est héréditaire.

Conclusion : selon le principe de récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{1/u_n} - u_n = u_n (e^{1/u_n} - 1),$$

or $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned} e^{1/u_n} - 1 > 0 &\Leftrightarrow e^{1/u_n} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{u_n} > 0 \\ &\Leftrightarrow u_n > 0, \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

- c. La suite (u_n) admet une limite car elle est croissante. Supposons par l'absurde qu'elle converge vers une limite finie ℓ , on a nécessairement $\ell > 0$ puisque (u_n) est croissante. En passant à la limite dans le relation de récurrence, on trouve $\ell = \ell e^{1/\ell}$ par continuité de l'exponentielle, or

$$\begin{aligned} \ell = \ell e^{1/\ell} &\Leftrightarrow 1 = e^{1/\ell} \\ &\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{\ell} \quad \text{absurde!} \end{aligned}$$

Ainsi la limite de (u_n) est infinie, plus précisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

```
u = 1
n = 0
```

2.

```
while u < 10**6 :
    u = u*np.exp(1/u)
    n = n + 1
print(n)
```

3. Limite en $+\infty$: On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$ par composition de limites.

Par produit de limites on trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 0^+ : On pose $X = \frac{1}{x}$, de sorte que $x e^{1/x} = \frac{e^X}{X}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty$ par composition de limites, soit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

4. La fonction $x \mapsto e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, de ce fait f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^{1/x} - x \times \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^{1/x}(x-1)}{x}.$$

On a $e^{1/x} > 0$ et $x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par conséquent $f'(x)$ est de même signe que $x - 1$. On en déduit le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

5. a. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(x^{-1})^k}{k!}$ est de type exponentiel, par conséquent elle converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^{-1})^k}{k!} = e^{(x^{-1})} = e^{1/x}.$$

- b. On a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x e^{1/x} \\
 &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \quad (\text{question précédente}) \\
 &= x \left(1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \right) \quad (\text{somme par paquets}) \\
 &= x + 1 + x \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \\
 &= x + 1 + x \times \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \quad (\text{linéarité}) \\
 &= \boxed{x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}}.
 \end{aligned}$$

6. a. Minoration : on a

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{1}{2}}$$

car la série $\sum_{k \geq 3} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est à termes positifs.

Majoration : pour tout $k \geq 2$ on a $2 - k \leq 0$, d'où $x^{2-k} \leq 1$ car $x \geq 1$. Ainsi

$$\sum_{k=2}^n \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

pour tout $n \geq 2$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e}.$$

- b. Par la question 5-b) on sait que :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

Ainsi, en partant de l'encadrement obtenu à la question précédente, il vient :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

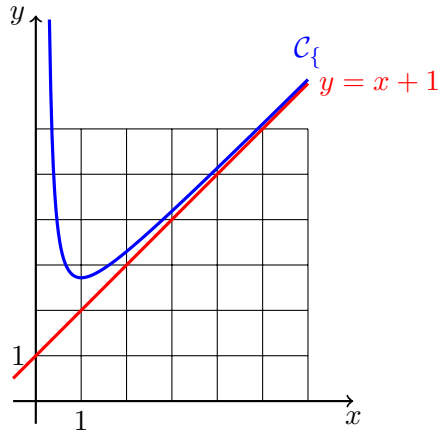
$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^n \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}}.$$

7. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$, par le théorème des gendarmes cela implique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

autrement dit $\boxed{f(x) - (x+1) = o(1) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$.



8.

9. a. Soit $k \in \mathbb{N}$, par définition on a $u_{k+1} = u_k e^{1/u_k}$, sachant que la suite est à termes strictement positifs on peut prendre le logarithme de chacun des membres :

$$\begin{aligned} \ln(u_{k+1}) &= \ln(u_k e^{1/u_k}) \\ &= \ln(u_k) + \ln(e^{1/u_k}) \\ &= \ln(u_k) + \frac{1}{u_k} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}}.$$

b. On somme l'égalité précédente pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \\ \ln(u_n) - \ln(u_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \quad (\text{par télescopage}) \\ \ln(u_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \quad (\text{car } u_0 = 1) \end{aligned}$$

10. a. Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que la suite (u_n) est croissante avec $u_0 = 1$, par conséquent $u_k \geq 1$. On peut ainsi appliquer l'encadrement (*) avec $x = u_k$, on obtient :

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k},$$

sachant que $f(u_k) = u_{k+1}$ et en ajoutant 1 à chaque membre, on arrive à :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}}.$$

b. On somme chaque membre pour k allant de 0 à $n-1$, :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2u_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{u_k}.$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0 = u_n - 1,$$

Par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2u_k} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2u_k} = n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

et de la même manière

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{u_k} = n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

En remplaçant on trouve que :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

Or, on a vu que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n)$ en question 9-b), d'où

$$n + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - 1 \leq n + e \ln(u_n),$$

enfin en ajoutant $1 - n$ à chaque membre on conclut que :

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. a. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

b. On divise l'encadrement de la question 10-b) par u_n :

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n},$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$, ainsi les membres de droite et de gauche tendent vers 0

lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n}{u_n} = 0$, soit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n} = 1$. Ceci montre que $u_n \sim n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

12. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n).$$

Par ailleurs, pour n voisin de $+\infty$, on a $u_n = n + o(n)$ d'après la question précédente, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \ln(n + o(n)) \\ &= \ln(n \times (1 + o(1))) \\ &= \ln(n) + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln(n) + o(1) \quad (\text{car } \ln(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0) \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.