

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$
 - a. Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$
 - b. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j)

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2
En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1

- a. Déterminer $P(Z_k = 1)$ et déterminer $P(Z_k = k)$
- b. Montrer, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n} P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n} P(Z_k = \ell - 1)$$

- c. En déduire : $E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} E(Z_k) + 1$

6. a. Montrer que la suite $(v_k)_{k \geq 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

- b. En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

$$E(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \right)$$

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4

Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k

7. Rappeler la valeur de $P(Z_k = 1)$. Déterminer $P(Z_k \geq 5)$.
8. Montrer : $P(Z_k = 2) = 6 \frac{2^k - 2}{4^k}$
9. On note, pour tout i de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».
 - a. Montrer : $P(Z_k \leq 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 - b. Calculer $P(A_1)$, $P(A_1 \cap A_2)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 - c. En déduire : $P(Z_k \leq 3)$, puis $P(Z_k = 3)$ et $P(Z_k = 4)$

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$
 - a. Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$
 - b. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j)

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2
En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1

- a. Déterminer $P(Z_k = 1)$ et déterminer $P(Z_k = k)$
- b. Montrer, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n} P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n} P(Z_k = \ell - 1)$$
- c. En déduire : $E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} E(Z_k) + 1$

6. a. Montrer que la suite $(v_k)_{k \geq 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
- b. En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

$$E(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \right)$$

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4

Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k

7. Rappeler la valeur de $P(Z_k = 1)$. Déterminer $P(Z_k \geq 5)$.
8. Montrer : $P(Z_k = 2) = 6 \frac{2^k - 2}{4^k}$
9. On note, pour tout i de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages » .
 - a. Montrer : $P(Z_k \leq 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 - b. Calculer $P(A_1)$, $P(A_1 \cap A_2)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 - c. En déduire : $P(Z_k \leq 3)$, puis $P(Z_k = 3)$ et $P(Z_k = 4)$