

Eléments de corrigé

Partie I.

1. Si on considère que tirer le numéro i comme un succès dans une épreuve de Bernoulli (tirage d'une boule) de paramètre $1/n$ (probabilité d'obtenir la boule i), X_i compte le nombre de succès sur k épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/n$, donc X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k, 1/n)$.

$$X_i(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket \text{ et : } \forall s \in \llbracket 0, k \rrbracket, P(X_i = s) = \binom{k}{s} \frac{1}{n^s} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-s}.$$

$$E(X_i) = \frac{k}{n} \text{ et } V(X_i) = \frac{k(n-1)}{n^2}$$

2. Non, car, par exemple : $P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = 0]\right) = 0$ et $\prod_{i=1}^n P(X_i = 0) \neq 0$.
3. a. Si on considère que tirer le numéro i ou le numéro j comme un succès dans une épreuve de Bernoulli (tirage d'une boule) de paramètre $2/n$ (probabilité d'obtenir la boule i ou la boule j), $X_i + X_j$ compte le nombre de succès sur k épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $2/n$, donc $X_i + X_j$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k, 2/n)$.

$$X_i + X_j(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket \text{ et : } \forall s \in \llbracket 0, k \rrbracket, P(X_i + X_j = s) = \binom{k}{s} \left(\frac{2}{n} \right)^s \left(\frac{n-2}{n} \right)^{k-s}.$$

$$V(X_i + X_j) = \frac{2k(n-2)}{n^2}.$$

- b. $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j)$ donne :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{2k(n-2)}{n^2} - 2 \frac{k(n-1)}{n^2} \right) = -\frac{k}{n^2}$$

Partie II.

4. a. $[Z_1 = 1]$, et $[E(Z_1) = 1]$.
- b. $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
 $[P(Z_2 = 1) = 1/n]$ (n^2 issues sur 2 tirages, n cas favorables : on pioche la même boule au premier et au deuxième tirage).
 $[P(Z_2 = 2) = 1 - P(Z_2 = 1) = (n-1)/n]$.
 $[E(Z_2) = 1 \times P(Z_2 = 1) + 2 \times P(Z_2 = 2) = (2n-1)/n]$.
5. a. Notons N_j le numéro de la j -ème boule tirée.

$[Z_k = 1] = [N_2 = N_1] \cap \dots \cap [N_k = N_1]$ (toutes les boules tirées ont le même numéro, celui de la première boule tirée).

Les $k-1$ événements dans cette intersection sont indépendants et $P(N_j = N_1) = 1/n$ pour $j \in \{2, \dots, k\}$, donc :

$$P(Z_k = 1) = \frac{1}{n^{k-1}}$$

$[Z_k = k]$ signifie qu'on a tiré k numéros différents. On remarque donc que : $P(Z_k = k) = 0$ si $k > n$ (au plus n numéros différents).

Si $1 \leq k \leq n$, la première boule étant tirée, pour que $[Z_k = k]$ se réalise, on a $n-1$ choix de

numéros sur n pour le deuxième tirage, puis $n-2$ choix sur n pour le troisième, etc... et $n-(k-1)$ choix sur n pour le k -ième tirage.

Donc :

$$P(Z_k = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n}.$$

On peut écrire ce produit comme :

$$P(Z_k = k) = \frac{(n-1) \times \dots \times (n-(k-1))}{n^{k-1}} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1))}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

En conclusion :

$$P(Z_k = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{n!}{(n-k)!n^k} & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

- b. Pour $2 \leq \ell \leq n$, on remarque d'abord que $[Z_{k+1} = \ell]$ ne se réalise que lorsque $[Z_k = \ell]$ (et on tire une boule déjà obtenue) OU $[Z_k = \ell - 1]$ (et on tire une boule qu'on n'a pas encore obtenu).

$$\text{Donc : } [Z_{k+1} = \ell] = ([Z_{k+1} = \ell] \cap [Z_k = \ell]) \cup ([Z_{k+1} = \ell] \cap [Z_k = \ell - 1]).$$

En passant aux probabilités, par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = \ell) &= P([Z_{k+1} = \ell] \cap [Z_k = \ell]) + P([Z_{k+1} = \ell] \cap [Z_k = \ell - 1]) \\ P(Z_{k+1} = \ell) &= P_{Z_k = \ell}(Z_{k+1} = \ell)P(Z_k = \ell) + P_{Z_k = \ell - 1}(Z_{k+1} = \ell)P(Z_k = \ell - 1) \end{aligned}$$

Si $[Z_k = \ell]$ est réalisé, alors on a pioché ℓ numéros distincts en k tirages. $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé quand on pioche au rang suivant encore un des ℓ numéros déjà tirés, et il y a ℓ choix possibles sur n , donc :

$$P_{[Z_k = \ell]}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}$$

Si $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, alors on a pioché $\ell - 1$ numéros distincts en k tirages., $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé quand on pioche au rang suivant un nouveau numéro, différent de ceux tirés, et il y a $n - (\ell - 1)$ choix possibles sur n , donc :

$$P_{[Z_k = \ell - 1]}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{n - \ell + 1}{n}$$

De ce qui précède, pour $2 \leq \ell \leq n$:

$$P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}P(Z_k = \ell - 1).$$

- Pour $\ell = 1$, la formule donne :

$$P(Z_{k+1} = 1) = \frac{1}{n}P(Z_k = 1) + \frac{n - 1 + 1}{n}P(Z_k = 0) = \frac{1}{n}P(Z_k = 1).$$

Comme $P(Z_k = 1) = 1/n^{k-1}$ et $P(Z_{k+1} = 1) = 1/n^k$, cette formule est encore juste.

- Pour $\ell = n + 1$, la formule donne :

$$P(Z_{k+1} = n + 1) = \frac{n + 1}{n}P(Z_k = n + 1) + 0 \times P(Z_k = n)$$

avec $P(Z_{k+1} = n + 1) = P(Z_k = n + 1) = 0$, donc la formule est encore vraie.

- Pour $\ell > n + 1$, $P(Z_{k+1} = \ell) = P(Z_k = \ell) = P(Z_k = \ell - 1) = 0$, donc la formule est encore vraie.

Conclusion : la formule donnée est vraie pour tout entier $\ell \geq 1$.

c. $E(Z_{k+1}) = \sum_{\ell \geq 1} \ell P(Z_{k+1} = \ell).$

De la question précédente :

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell \geq 1} \ell \left(\frac{\ell}{n} P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n} P(Z_k = \ell - 1) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell \geq 1} \ell^2 P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell \geq 1} \ell P(Z_k = \ell - 1) - \frac{1}{n} \sum_{\ell \geq 1} \ell(\ell - 1) P(Z_k = \ell - 1). \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $i = \ell - 1$ dans les deux dernières sommes :

$$E(Z_{k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{\ell \geq 1} \ell^2 P(Z_k = \ell) + \sum_{i \geq 0} (i + 1) P(Z_k = i) - \frac{1}{n} \sum_{i \geq 0} (i + 1) i P(Z_k = i).$$

On remarque que $P(Z_k = 0) = 0$ donc les deux dernières sommes commencent à 1.

En développant tout :

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1}) &= \frac{1}{n} \sum_{\ell \geq 1} \ell^2 P(Z_k = \ell) + \underbrace{\sum_{i \geq 1} i P(Z_k = i)}_{=E(Z_k)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i \geq 1} P(Z_k = i)}_{=1} - \frac{1}{n} \sum_{i \geq 1} i^2 P(Z_k = i) - \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i \geq 1} i P(Z_k = i)}_{=E(Z_k)} \end{aligned}$$

(remarque : $\sum_{i \geq 1} P(Z_k = i) = 1 =$ probabilité totale)

et donc, en simplifiant :

$$E(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Z_k) + 1 = \frac{n-1}{n} E(Z_k) + 1.$$

6. a. $v_{k+1} = E(Z_{k+1}) - n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Z_k) + 1 - n.$

Or $E(Z_k) = v_k + n$, donc :

$$v_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) (v_k + n) + 1 - n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v_k + n - 1 + 1 - n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v_k$$

et ce, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc $(v_k)_{k \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 1 - 1/n = (n-1)/n$.

b. On en déduit :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad v_k = q^{k-1} v_1.}$$

puis : $E(Z_k) = v_k + n$, et $v_1 = E(Z_1) - n = 1 - n$ donc :

$$\begin{aligned} E(Z_k) &= n + \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} (n-1) \\ &= n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} \\ &= n - n \times \frac{(n-1)^k}{n^k} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

Partie III.

7. a. $\boxed{P(Z_k = 1) = 1/4^{k-1}}$.
 b. $\boxed{P(Z_k \geq 5) = 0}$ (au plus 4 numéros).
 8. Montrons la formule par récurrence. Posons :

$$\mathcal{P}_k : \ll P(Z_k = 2) = 6 \frac{2^k - 2}{4^k} \gg$$

- $\mathcal{P}_1 : \ll P(Z_1 = 2) = 0 \gg$ est vraie, car $Z_1 = 1$.
- Supposons que, pour $k \geq 1$, $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

D'après la formule du **5.b.**, partie II :

$$P(Z_{k+1} = 2) = \frac{2}{4}P(Z_k = 2) + \frac{3}{4}P(Z_k = 1)$$

Or $P(Z_k = 1) = \frac{1}{4^{k-1}}$ donc, avec l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = 2) &= \frac{2}{4} \times 6 \times \frac{2^k - 2}{4^k} + \frac{3}{4^k} \\ &= 3 \times \frac{2^k - 1}{4^k} \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part : } 6 \times \frac{2^{k+1} - 2}{4^{k+1}} = 3 \times 2 \times \frac{2 \times (2^k - 1)}{4 \times 4^k} = 3 \times \frac{2^k - 1}{4^k}.$$

D'où $P(Z_{k+1} = 2) = 6 \times \frac{2^{k+1} - 2}{4^{k+1}}$ et $\mathcal{P}_{k+1}$.

9. a. $[Z \leq 3]$ si et seulement si l'un des événements $A_1, \dots, A_4$ se produit. Donc :

$$P(Z \leq 3) = P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right).$$

La formule de Poincaré (ou du crible) donne :

$$P(Z \leq 3) = \sum_{i=1}^4 P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < \ell \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Or dans chaque somme les termes sont égaux, il suffit de compter le nombre de termes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 P(A_i) &= 4P(A_1), \\ \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j) &= 6P(A_1 \cap A_2) \\ \sum_{1 \leq i < j < \ell \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) &= 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$, donc on a bien :

$$\boxed{P(Z \leq 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}.$$

Cette valeur est connue, voir **9b**.

- b.** Ne pas tirer le nombre 1 se réalise à chaque tirage avec une probabilité de $3/4$, donc : $P(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Ne pas tirer le nombre 1 ou 2 se réalise à chaque tirage avec une probabilité de $1/2$, donc :

$$P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\bar{A}_4) = \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

- c.** On exprimera les probabilités en fonction de $a_k = P(Z_k = 1)$, $b_k = P(Z_k = 2)$ et $c_k = P(Z_k \leq 3)$ obtenues précédemment :

$$P(Z_k = 3) = P(Z_k \leq 3) - P(Z_k \leq 2) = c_k - a_k - b_k$$

et :

$$P(Z_k = 4) = 1 - P(Z_k \leq 3) = 1 - c_k$$