

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $V = {}^t(0 \ 1 \ -1)$ (vecteur colonne).

Si λ est une valeur propre d'une matrice M , on note $E_\lambda(M)$ le sous-espace propre associé.

Partie I : réduction de A

1.
 - a. En raisonnant sur les colonnes de A , justifier que A n'est pas inversible.
 - b. En déduire sans calcul une valeur propre λ_1 de A , puis montrer que $U = {}^t(0, 1, -2)$ est une base du sous-espace propre associé.
2. Calculer $A^3 - 2A^2$ et en déduire le spectre de A
3. Justifier brièvement que A n'est pas diagonalisable.

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

- b. Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II : résolution d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire :

$$\mathcal{S} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3 , fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = {}^t(x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))$ et

$X'(t) = {}^t(x_1'(t) \ x_2'(t) \ x_3'(t))$ (matrices colonnes).

On remarquera que $\mathcal{S}$ s'écrit matriciellement : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$

On pose enfin $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}X(t) = {}^t(y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t))$

5. Montrer que X est solution de $\mathcal{S}$ si, et seulement si Y est solution du système : $\mathcal{S}' : \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = TY(t)$
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifier que $t \mapsto \lambda te^t$ est solution de l'équation différentielle : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = y(t) + \lambda e^t$
7. Résoudre $\mathcal{S}'$ puis $\mathcal{S}$
8. Déterminer les états d'équilibre des solutions de $\mathcal{S}$. Sont-ils stables ?

Partie III : recherche d'un commutant.

Dans cette partie, on note, pour une matrice M quelconque, $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec M , c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(M) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MX = XM\}$$

9. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
10. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Y = P^{-1}XP$
Montrer que :

$$X \in \mathcal{C}(A) \iff Y \in \mathcal{C}(T)$$

$$11. \text{ Montrer que : } \mathcal{C}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

En déduire une base de $\mathcal{C}(T)$

12. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$ et indiquer une base de cet espace vectoriel.