

1. a. Les deux dernières colonnes de A sont proportionnelles, donc la famille des vecteurs colonnes de A n'est pas libre : A n'est pas inversible.
- b. Comme A n'est pas inversible, $0 \in \text{Sp}(A)$.

On résout le système linéaire $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ d'inconnue $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ pour trouver :

$$E_0(A) = \text{Vect} \left({}^t(0, -\frac{1}{2}, 1) \right) = \text{Vect}(U)$$

2. $A^3 - 2A^2 = -A$, donc $X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A .
 $x^3 - 2x^2 + x = \text{si, et seulement si } x = 0 \text{ ou } x = 1$, donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$.

On sait déjà que $0 \in \text{Sp}(A)$.

On résout le système linéaire $AX = X$ d'inconnue $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ pour trouver : $1 \in \text{Sp}(A)$ et

$$E_1(A) = \text{Vect} ({}^t(0, -1, 1)) \quad \text{de dimension 1.}$$

Conclusion : $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

3. Question qui n'est plus dans l'esprit du programme. A n'est pas diagonalisable car nous n'avons « pas assez » de vecteurs propres (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 2) : comme A n'admet que deux sous-espaces propres, chacun de dimension 1, nous ne pourrions pas constituer de base de vecteurs propres.
Rédaction quand même possible (« avec nos moyens »).

Supposons que A soit diagonalisable. Alors il existerait une base (C_1, C_2, C_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Comme le spectre de A n'admet que deux valeurs propres, deux de ces vecteurs sont dans le même sous-espace propre ($E_0(A)$ ou $E_1(A)$) et comme ils forment une famille libre, ce sous-espace propre est de dimension au moins 2.

Or tous les sous-espaces propres de A sont de dimension 1 : contradiction.

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

4. a. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifiera au brouillon que $PP^{-1} = I_3$.
- b. Calcul.

Partie II.

5. $X = PY$ est solution de $\mathcal{S}$ ssi : $PY' = PTP^{-1}PY$ soit $Y' = TY$.
6. Calcul.
7. Posons $Y = {}^t(y_1 \ y_2 \ y_3)$

$Y' = TY$ ssi :

$$\begin{cases} y'_1 = 0 & (1) \\ y'_2 = y_2 + y_3 & (2) \\ y'_3 = y_3 & (3) \end{cases}$$

(1) donne : $\exists c_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = c_1.$

(3) donne : $\exists c_3 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_3(t) = c_3 e^t.$

(2) s'écrit alors : $y_2' = y_2 + c_3 e^t.$

D'après la question précédente, $\phi : t \mapsto c_3 t e^t$ est solution de (2).

Les solutions homogènes de (2) sont de la forme $t \mapsto c_2 e^t$ avec $c_2 \in \mathbb{R}.$

Donc y_2 est solution de (2) si, et seulement si :

$$\exists c_3 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_2(t) = (c_2 + c_3 t) e^t$$

Conclusion : Y est solution de $\mathcal{S}'$ si, et seulement si : il existe trois réels c_1, c_2, c_3 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ (c_2 + t c_3) e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$

On en déduit : X est solution de $\mathcal{S}$ si, et seulement si : il existe trois réels c_1, c_2, c_3 tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} c_3 e^t \\ c_1 + (c_2 + (\frac{3}{4} + t) c_3) e^t \\ -2c_1 - (c_2 + c_3 t) e^t \end{pmatrix}$$

8. $AX = 0$ ssi $X \in \text{Vect}(U)$ donc les états d'équilibre sont les vecteurs proportionnels à U .
Ils ne sont pas stables, car une des valeurs propres de A est > 0 .

Partie III.

9. La matrice nulle d'ordre 3 est dans $\mathcal{C}(M)$ donc $\mathcal{C}(M)$ n'est pas vide.

Soit X, Y deux matrices de $\mathcal{C}(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}.$

Posons $Z = \lambda X + Y.$

Alors $MZ = \lambda MX + MY.$

Comme $MX = XM$ et $MY = YM$: $MZ = \lambda XM + YM = ZM$: donc $Z \in \mathcal{C}(M).$

Conclusion : $\mathcal{C}(M)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non vide et stable par combinaison linéaire : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

10. $AX = XA \iff (PTP^{-1})(PYP^{-1}) = (PYP^{-1})(PTP^{-1}) \iff P(TY)P^{-1} = P(YT)P^{-1} \iff TY = YT.$

Donc $\boxed{X \in \mathcal{C}(A) \iff Y \in \mathcal{C}(T)}.$

11. On pose $Y = (y_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$

On calcule :

$$TY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_{2,1} + y_{3,1} & y_{2,2} + y_{3,2} & y_{2,3} + y_{3,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix} \quad YT = \begin{pmatrix} 0 & y_{1,2} & y_{1,2} + y_{1,3} \\ 0 & y_{2,2} & y_{2,2} + y_{2,3} \\ 0 & y_{3,2} & y_{3,2} + y_{3,3} \end{pmatrix}$$

Donc $YT = TY$ si, et seulement si :

$$y_{1,2} = y_{1,3} = y_{2,1} = y_{3,1} = y_{3,2} = 0$$

$$y_{2,2} = y_{3,3}$$

(pas d'autres conditions sur les autres coefficients), ce qui donne Y de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & y_{2,2} & y_{2,3} \\ 0 & 0 & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

On en déduit :

$$\mathcal{C}(T) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$$

avec :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifiera que (M_1, M_2, M_3) est libre, c'est donc une base de $\mathcal{C}(T)$.

12. $Y \in \mathcal{C}(T)$ ssi il existe trois réels a, b, c tels que :

$$Y = aM_1 + bM_2 + cM_3.$$

Donc : $X \in \mathcal{C}(A)$ ssi il existe trois réels a, b, c tels que :

$$X = aPM_1P^{-1} + bPM_2P^{-1} + cPM_3P^{-1}.$$

En posant $N_i = PM_iP^{-1}$ pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, (N_1, N_2, N_3) est une famille génératrice de $\mathcal{C}(A)$.

De plus $aN_1 + bN_2 + cN_3 = 0$ implique $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$ donc $a = b = c = 0$: (N_1, N_2, N_3) est donc libre.

Conclusion : (N_1, N_2, N_3) est une base de $\mathcal{C}(A)$, qui est donc de dimension 3.