

# ORAUX ESM ST-CYR

## SUJET 1 (ESM 2019)

### EXERCICE 1.

---

Étudier la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} dx$ .

### EXERCICE 2.

---

On considère les espaces vectoriels  $S_2$  et  $A_2$  définis par :

$$S_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } {}^tM = M\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } {}^tM = -M\}$$

On considère également l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto 2M + {}^tM \end{aligned}$$

- 1/ Expliciter les ensembles  $S_2$  et  $A_2$ , en donner une base et la dimension.
- 2/ Former la matrice de  $\Phi$  relativement à la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Est-elle diagonalisable ?
- 3/ Soit  $M \in S_2$ . Déterminer  $\Phi(M)$ . Faire de même pour  $M \in A_2$ .
- 4/ On note  $\mathcal{B}$  la famille obtenue en réunissant les bases de  $S_2$  et  $A_2$  déjà déterminées.  
Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et former la matrice de  $\Phi$  relativement à cette base. Quel résultat cela permet-il de vérifier ?
- 5/ a/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe deux réels  $a_n$  et  $b_n$  tels que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \Phi^n(M) = a_n M + b_n {}^tM$$

et déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , des relations entre  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ .

- b/ Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ . On pourra étudier les suite  $(a_n + b_n)_n$  et  $(a_n - b_n)_n$ .
-

**SUJET 2 (ESM 2019)**

**EXERCICE 1.**

---

1/ Énoncer le théorème du rang.

2/ Étudier la bijectivité de l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y, z) \mapsto (x + y, x + 2y, x + 3y)$

**EXERCICE 2.**

---

On considère la fonction :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left( \frac{1}{\ln(2)} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1/ Montrer que  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité  $X$ , et que la fonction  $f$  suivante est une densité de  $X$  :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{4}{\ln(2)^2} \times \frac{1}{x(x^2 + 1)} \times \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2/ Montrer que  $X$  admet une espérance et une variance.

3/ Pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , on pose  $\Phi(x) = F(x)$ .

Montrer que  $\Phi$  est une bijection croissante de  $[1, +\infty[$  vers  $[0, 1[$ , et déterminer sa réciproque.

4/ Soit  $U$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0, 1[$ , et  $Z = \Phi^{-1}(U)$ .

Montrer que  $Z$  et  $X$  ont la même loi.

5/ En déduire une fonction Python d'entête `def X()` : renvoyant une simulation de  $X$ .

---

**SUJET 3 (ESM 2019)**

**EXERCICE 1.**

---

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, et  $Y = 2X - 3$ .  
Donner la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.

**EXERCICE 2.**

---

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'intégrale  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ .

1/ Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

2/ Déterminer le sens de variations de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3/ a/ Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ .

b/ Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$ .

c/ En déduire un équivalent de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

4/ Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_0 = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + (-1)^n I_n$$

5/ Prouver la convergence et donner la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

6/ En déduire un programme Python donnant une approximation de  $\ln(2)$  à  $10^{-6}$  près.

---

**SUJET 4 (ESM 2018)**

**EXERCICE 1.**

---

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable et telle que  $A^2 - 2A + I_3 = 0_3$ , où  $I_3$  et  $0_3$  sont respectivement la matrice identité et la matrice nulle de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Quelles sont les valeurs propres de  $A$ ? Montrer que  $A = I_3$ .

**EXERCICE 2.**

---

On définit une variable aléatoire  $X$  à valeur dans  $\mathbb{N}^*$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = a \times \ln \left( \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}} \right)$$

1/ Déterminer  $a$ .

2/ Montrer que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\ln \left( \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}} \right) \sim \frac{2}{n^2}$$

3/ La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance? Une variance?

4/ On considère une variable aléatoire  $U$  suivant la loi uniforme à densité sur  $[0, 1[$  et on pose :

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U} - 1} \right\rfloor$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

Montrer que  $Y$  et  $X$  ont la même loi.

5/ En déduire une fonction Python d'entête `def X():` retournant une simulation de  $X$ .

---

**SUJET 5 (ESM 2018)**

**EXERCICE 1.**

---

Rappeler la définition de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On donnera l'espérance et la variance associée.

**EXERCICE 2.**

---

On pose  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , non nulle et telle que  $A^2 = 0$ , ainsi que l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dont  $A$  est la matrice relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1/ Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}(T)$  des matrices  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $T$ , c'est-à-dire telles que  $MT = TM$ .
- 2/ Justifier qu'il existe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x) \neq (0, 0)$ .  
Montrer alors que la famille  $\mathcal{B} = (x, f(x))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , et écrire la matrice de  $f$  dans cette base.
- 3/ En déduire qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible telle que  $A = PTP^{-1}$ .
- 4/ On note  $\mathcal{C}(A)$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ . Montrer que :

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(T)$$

- 5/ Déterminer  $\mathcal{C}(A)$  ; on montrera en particulier que  $\mathcal{C}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et on en donnera une base.
-

**SUJET 6 (ESM 2017)**

**EXERCICE 1.**

---

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

Si oui, trouver une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$

**EXERCICE 2.**

---

Dans cet exercice, on cherche à estimer numériquement l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{u}{1+u^3} du$ .

1/ Justifier que  $I$  est bien définie.

2/ Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose  $Y = \frac{U}{1+U^3}$ .

Montrer que  $Y$  possède une espérance, et que celle-ci vaut  $I$ .

3/ On souhaite maintenant estimer l'espérance de  $Y$ . Pour cela on considère un  $n$ -échantillon  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de  $Y$  et l'estimateur  $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

Proposer une fonction Python d'entrée  $n$  et permettant de calculer une approximation de  $I$  grâce à  $\bar{Y}_n$ .

4/ Prouver que  $Y$  admet une variance, et que  $V(Y) \leq 1$ .

5/ Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a :  $P\left(\left|\bar{Y}_n - I\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ .

6/ Déterminer un entier  $n$  tel que l'écart entre  $\bar{Y}_n$  et  $I$  ait au moins 95% de chances d'être inférieur à  $10^{-3}$ .

---

**SUJET 7 (ESM 2017)**

**EXERCICE 1.**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ ;  $X$  a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires, ou impaires ?

**EXERCICE 2.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 1 - 2x^3 + \frac{2}{n}x(x-1)$ .

1/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  s'annule en un unique point de  $[0, 1]$ .

Dans toute la suite, on notera  $u_n$  le réel de  $[0, 1]$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ .

2/ En Python, écrire une fonction d'entête `def u(n)` : donnant une approximation de  $u_n$  obtenue par la méthode de dichotomie avec une marge d'erreur de  $10^{-6}$ . On pourra s'inspirer du script suivant :

```
def f(n, x):
    y=1-2*x**3+2/n*x*(x-1)
    return(y)

def u(n):
    a=0
    b=1
    while _____:
        c=(a+b)/2
        if _____:
            _____
        else:
            _____
    return(a)
```

3/ À la suite de ces fonctions, on a lancé le script et obtenu l'affichage suivants :

```
import numpy.pyplot as plt

L=[]
for n in range(1,26):
    L.append(u(n))
plt.plot(L, 'x')
```

Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite  $(u)$  ?

4/ Déterminer le sens de variations de la suite  $(u_n)$ , on pourra étudier le signe de  $f_{n+1}(u_n)$ .

5/ Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**SUJET 8 (ESM 2016)**

**EXERCICE 1.**

---

1/ Question de cours. Soit  $h$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

Rappeler la définition de la dérivabilité de  $h$  en  $x_0$ .

2/ Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . On considère la fonction  $g$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

a/ Montrer, pour tout réel  $x$  non nul, l'égalité :

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{F(x) - F(0)}{x} - \frac{F(-x) - F(0)}{x} \right]$$

b/ En déduire que  $g$  est continue en 0.

c/ Montrer enfin que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 2.**

---

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On dispose d'une pièce amenant le côté Pile avec probabilité  $p$ , et le côté Face avec probabilité  $1 - p$ .

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois Pile, et on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de Faces obtenus au cours des lancers.

Par exemple, si les lancers donnent successivement Pile-Pile, alors  $X = 0$ . Si les lancers donnent Face-Pile-Face-Face-Pile, alors  $X = 3$ .

1/ a/ Calculer  $P(X = 0)$  et  $P(X = 1)$ .

b/ Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ .

c/ Vérifier que :  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$ .

2/ Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux Piles au cours d'une infinité de lancers de la pièce ».

3/ Montrer que  $X$  possède une espérance et la calculer.

4/ Compléter le script Python ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable aléatoire  $X$  :

```
p=0.3
S=0
n=0
while S<2:
    n=n+1
    if _____:
        S=S+1
print (_____)
```

**SUJET 9 (ESM 2015)**

**EXERCICE 1.**

---

- 1/ Donner la définition de la notion de valeur propre d'une matrice carrée.
- 2/ On considère l'endomorphisme  $\Phi$  qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_3[x]$  associe le polynôme  $\Phi(P) = 3P' + 2P$ .
  - a/ Former la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$ .
  - b/ Déterminer les valeurs propres de cette matrice ; est-elle diagonalisable ?

**EXERCICE 2.**

---

Pour tout entier naturel  $n$  on définit la fonction  $f_n$  qui à tout réel  $x$  associe le réel  $f_n(x) = n - xe^x$ .

- 1/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $[0, +\infty[$ . On note  $u_n$  cette solution.
  - 2/ En calculant  $f_{n+1}(u_n)$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - 3/ Montrer par l'absurde que la suite  $(u_n)$  n'est pas convergente. Qu'en déduire sur sa limite ?
  - 4/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq n$ .
  - 5/ Écrire un fonction Python d'entête `approx_u(n)` : qui renvoie une valeur approchée de  $u_n$  à  $10^{-3}$  près obtenue par l'algorithme de dichotomie.
  - 6/ Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .
-

**SUJET 10 (ESM 2015)**

**EXERCICE 1.**

---

- 1/ Donner la définition du gradient et des points critiques d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- 2/ Soit  $f$  la fonction qui à tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  associe  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ .  
Déterminer les points critiques de  $f$ . Cette fonction présente-t-elle des extremas ?

**EXERCICE 2.**

---

Un binôme de personnes nommées  $A$  et  $B$  participe à une épreuve physique qui consiste à grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes à réussi, elle doit attendre que l'autre en fasse de même.

On considère que :

- $A$  et  $B$  dispose chacun de leur propre corde.
- $A$  et  $B$  ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- $p$  est un réel fixé représentant la probabilité, lors d'un essai, de réussir à grimper la corde.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute.

On note  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) le nombre d'essais nécessaires à  $A$  (resp à  $B$ ) pour grimper la corde, et  $Y$  la variable aléatoire égale à  $|X_1 - X_2|$ .

- 1/ Quelle est la loi de  $X_1$  ? De  $X_2$  ? Donner leur espérance et leur variance.
  - 2/ Que représente l'événement  $(Y = 0)$  ? Déterminer sa probabilité.
  - 3/ Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on a  $P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}$ .
  - 4/ Écrire un programme Python permettant de simuler la variable aléatoire  $Y$ .
  - 5/ (*Question supplémentaire*) Pour quelles valeurs de  $p$  les deux personnes s'attendent-elles en moyenne moins de 5 minutes ?
-

**SUJET 11 (ESM 2015)**

**EXERCICE 1.**

---

1/ Que dire de la limite d'une suite croissante ?

2/ Soit  $(u_n)$  une suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 > 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

Quelles sont les limites possibles de cette suite ? Quelle est sa variation ? Qu'en déduire sur sa limite ?

**EXERCICE 2.**

---

Une urne contient deux boules : une blanche et une rouge.

On effectue dans cette urne une succession de tirages en respectant la règle suivante : si la boule tirée est blanche, on l'enlève du jeu et on ajoute une boule rouge dans l'urne. Si la boule tirée est rouge, on l'enlève du jeu et on ajoute une boule blanche dans l'urne.

Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $N_i$  le nombre de boules blanches contenues dans l'urne après le  $i$ -ième tirage, et on note  $U_i$  la matrice ligne :

$$U_i = \left( P(N_i = 0) \quad P(N_i = 1) \quad P(N_i = 2) \right)$$

Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_i$  la variable aléatoire égale à 1 si le  $i$ -ième tirage a donné une boule blanche, et 0 sinon.

1/ Démontrer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $P(N_{i+1} = 1) = P(N_i = 0) + P(N_i = 2)$ .

Établir des relations similaires pour  $P(N_{i+1} = 0)$  et  $P(N_{i+1} = 2)$ .

2/ Déterminer une matrice  $A$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $U_{i+1} = U_i A$ .

3/ Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

4/ En déduire la loi de  $N_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

5/ Comment en déduire la loi de  $B_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  ?

---

**EXERCICE 1.**

---

**Partie I : calcul d'une somme de série**

Soit  $x \in ]0, 1[$ .

1/ Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} t^k$  en fonction de  $n$  et  $t$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

2/ En déduire l'égalité  $\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ .

3/ À l'aide d'un encadrement simple, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ .

4/ En déduire la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  ainsi que l'égalité :

$$\forall x \in ]0, 1[, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

**Partie II : loi binomiale négative**

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ . On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi géométrique de paramètre  $p$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $Y_n = \frac{n}{S_n}$ .

1/ a/ Rappeler la loi de  $S_1$ , et donner  $E(S_1)$ .

b/ À l'aide de la partie I, montrer que  $Y_1$  admet une espérance et que  $E(Y_1) = \frac{-p \ln(p)}{q}$ .

2/ a/ Préciser  $S_2(\Omega)$ .

b/ Soit  $k \in S_2(\Omega)$ . Prouver que  $P(S_2 = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$ .

c/ Montrer que  $Y_2$  admet une espérance et la calculer.

---

**SUJET 13 (ESM 2013)**

**EXERCICE 1.**

---

**Partie I : résultats préliminaires**

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $\beta = 1 - \alpha$ . Soit  $Z$  une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(Z = k) = \alpha \beta^k$$

1/ Donner la loi de  $U = Z + 1$ . Reconnaître cette loi.

2/ En déduire  $E(Z)$  et  $V(Z)$  en fonction de  $\alpha$ .

**Partie II**

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ . On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(Y = n) = p q^n$$

On pose  $M = \max(X, Y)$  et  $m = \min(X, Y)$ .

1/ a/ Déterminer  $M(\Omega)$  et  $m(\Omega)$ .

b/ Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  avec  $i < j$ . Donner  $P(M = i, m = j)$ .

c/ Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  avec  $i > j$ . Prouver que  $P(M = i, m = j) = 2p^2q^{i+j}$ .

d/ Calculer  $P(M = i, m = i)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

2/ a/ Prouver :  $\forall i \in \mathbb{N}, P(M = i) = \lambda_p q^i + \mu_p q^{2i}$ , où  $\lambda_p, \mu_p$  sont des réels à exprimer en fonction de  $p$ .

b/ Prouver :  $\forall j \in \mathbb{N}, P(m = j) = \beta_q q^{2j}$ , où  $\beta_q$  est un réel à exprimer en fonction de  $q$ .

---

**SUJET 14 (ESM 2016)**

**EXERCICE 1.**

---

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1/ Rappeler la définition de la convergence en loi pour une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- 2/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est la densité d'une variable aléatoire notée  $X_n$ .
- 3/ On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y_n = nX_n$ .
  - a/ Déterminer la fonction de répartition  $F_n$  de la variable  $Y_n$ .
  - b/ Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**EXERCICE 2.**

---

On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_3[x]$  par :

$$\forall P = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x], f(P) = ax^2 + bx + c$$

- 1/ Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[x]$ .
  - 2/ Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_3[x]$ .
  - 3/ Déterminer le rang de  $f$ , l'image de  $f$  et le noyau de  $f$ .
  - 4/ Quelles sont les valeurs propres de  $A$ ? Est-elle diagonalisable?
  - 5/ On pose  $B = I_4 + A^2$  où  $I_4$  est la matrice identité d'ordre 4. Calculer  $B^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .
-