Exercice issu du rapport du jury du concours 2021. Le programme de mathématiques était à l'époque différent, quelques formulations ne sont plus au programme désormais (cela est précisé ci-dessous).

Exercice 1 - Cours

On donne X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi uniforme sur $[0;1[$, Soit alors $\lambda > 0$ un réel, on définit $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$.

1. Déterminer la loi de Y, en préciser son espérance et sa variance (éventuelles).

2. Comment choisir α et β réels pour que $U = \alpha X + \beta$ suive une loi uniforme (à densité) sur $[-2;3[$?

3. Rappeler la définition du moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité puis caculer $m_r(X)$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.

Nota bene : les moments d'ordre $r > 2$ ne sont plus au programme désormais.

Exercice 2

On définit l'ensemble F des suite réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n\left(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n\right) = 4x_{n+1} - 3x_n - x_{n+2}$$

1. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_0 = 3$ et $x_1 = -2$, quelles sont alors les valeurs de x_2 et x_3 ?

2. Etablir que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Nota bene : la notation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$, on admet que cet ensemble est un espace vectoriel.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1$. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

4. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 2n + 1$ est également un élément de F.

5. On définit une application h sur F par : $h\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_1; x_0)$

Etablir que h est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}^2$.

6. Calculer $h\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et $h\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été définies en questions **3**. et **4**.

7. Déterminer l'image et le noyau de h. En déduire que h est un isomorphisme.

8. Déterminer la dimension de F puis en fournir une base.

Nota bene : une propriété (hors programme) permet d'affirmer que si f est un isomorphisme de E vers F alors E et F ont même dimension.

9. Proposer un programme Python permettant de calculer x_n lorsque l'entier $n \geqslant 2$ est fourni, ainsi que les valeurs x_0 et x_1.

10. Utiliser votre programme pour produire une représentation graphique, sous la forme d'un nuage de points, des 100 premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.