

Exercice 1

On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard successifs d'une boule avec remise dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche et on note Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.

1. **Cours** : donner la définition de la loi d'un couple de variables aléatoires.
2. **a.** Déterminer la loi de X et celle de Y
 - b.** Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 - c.** On pose $W = \min(X, Y)$. Que représente W ? Déterminer la loi de W
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule le couple (X, Y) :

```
import numpy.random as rd
def simul():
    n,X,Y=1,0,0
    while X==0 or Y==0:
        b=rd.randint(1,4) #1:blanc ; 2:noir ; 3:rouge
        if b==1 and X==0:
            X=_____
        if _____:
            Y=_____
        n=n+1
    return (X,Y)
```

4. On pose $U = |X - Y|$
 - a.** Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $(W = k)$ est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$
 - b.** Que peut-on en déduire sur les deux variables U et W ? En déduire la loi de U

Exercice 2 - sans préparation

Soit $x \in \mathbb{R}$

On définit, lorsque l'intégrale est convergente, la fonction

$$\phi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ
2. Démontrer que ϕ est décroissante sur son domaine de définition.
3. Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$