ECG - maths appliquées - sujet 1 **Oral type ESM Saint-Cyr** 4 juin 2026

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - 2y(x) = xe^{2x}$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $\phi : x \mapsto kx^2e^{2x}$ où k est un réel à déterminer.
2. Résoudre (E).
3. Déterminer la solution y_0 de (E) vérifiant $y_0(\ln 2) = 0$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A relativement à la base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Calculer $A^3 - A^2$
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Calculer $f(e_1 - e_3)$.
4. Etudier les variations de la fonction $\phi : x \mapsto x^3 - x^2 + 2$.
5. Montrer que A ne possède qu'une seule valeur propre λ que l'on précisera. Déterminer le sous-espace propre associé.
6. Soit $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$. On note $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$
   - **a.** Montrer que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - **b.** Ecrire $f(u_2)$ et $f(u_3)$ comme combinaisons linéaires de u_2 et de u_3.
   - **c.** En déduire la matrice de f relative à la base $\mathcal{U}$.

ECG - maths appliquées - sujet 2 **Oral type ESM Saint-Cyr** 4 juin 2026

Exercice 1

Une urne contient 2 boules bleues, 2 boules rouges et 1 boule verte.
On effectue 2 tirages successifs dans l'urne, sans remise, et on note X le nombre de boules bleues obtenues, Y le nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la covariance de (X, Y).

Exercice 2

On pose, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = x^2 - x\ln(1 + x)$.

1. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \geqslant 0$. En déduire les variations de f', puis celles de f.
2. On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$
   - **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leqslant 1$.
   - **b.** Montrer que, pour $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x - \ln(1 + x) \leqslant 1$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - **c.** On donne $\ln(2) \approx 0,7$ et on pose $a = f'(1)$.
     - i. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$: $0 \leqslant f'(x) \leqslant a$.
     - ii. En remarquant que $f(0) = 0$, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant au_n$, puis que :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant a^n.$$
   - **d.** En déduire que u_n a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Au vu de la majoration obtenue dans la question **2.c.ii)**, à partir de quel rang est-on sûr d'avoir $u_n \leqslant 10^{-4}$?
4. Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{1}{1-a}$.

ECG - maths appliquées - sujet 3 **Oral type ESM Saint-Cyr** 4 juin 2026

Exercice 1

1. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\dfrac{x^3}{x^2+1} = n$ admet une unique solution, notée x_n, dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $g \,:\, x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_{n+1}) > g(x_n)$.
   En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant x_n \leqslant n+1$.
4. En déduire la limite de x_n et un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère le système linéaire suivant : $\mathcal{S} \,:\, \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{llll} x'(t) & = -x(t) & +2y(t) & \\ y'(t) & = -x(t) & & -z(t) \\ z'(t) & = 2x(t) & -2y(t) & +z(t) \end{array} \right.$

On notera $X = {}^{\mathrm{t}}(x \quad y \quad z)$ l'inconnue de ce système.

1. Ecrire la matrice A du système $\mathcal{S}$.
2. Calculer A^3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Justifier que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible de dernière ligne $(2 \quad -2 \quad 1)$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale avec des éléments diagonaux rangés dans l'ordre décroissant.
4. Résoudre $\mathcal{S}$.
5. Déterminer l'unique solution X^* de $\mathcal{S}$ vérifiant $X^*(0) = {}^{\mathrm{t}}(3 \quad 1 \quad -3)$.
6. Quels sont les états d'équilibre du système ?

ECG - maths appliquées - sujet 4 **Oral type ESM Saint-Cyr** 4 juin 2026

Exercice 1

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $v_n - v_{n-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2}$.

   Indication : On pourra vérifier que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.
2. En déduire successivement que :
   - **a.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(v_n - v_{n-1})$ est une série absolument convergente.
   - **b.** $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente.
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Exercice 2

Soit X une variable suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(]0,1])$.

1. Rappeler une densité pour X, sa fonction de répartition, donner son espérance et sa variance.
2. On note $Y = -\ln(X)$.
   - **a.** Déterminer $Y(\Omega)$.
   - **b.** Déterminer la fonction de répartition de Y.
   - **c.** Reconnaître la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

3. On note $Z = \dfrac{1}{X}$.

a. Déterminer $Z(\Omega)$.

b. Pour $x \geqslant 1$, montrer que $P(Z \leqslant x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

c. Justifier que Z est à densité et déterminer une densité pour Z.

d. Z admet-elle une espérance ?