Exercice 1

On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on désigne par f^n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$f^0 = \mathrm{id}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois)
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
On considère les vecteurs $u = (0,1,1), v = (1,1,1)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w
   Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$
3. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\mathrm{id}$
5. Montrer que la famille (f, id) est libre dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$
   Que peut-on en déduire concernant la décomposition obtenue à la question **4.** ?
6. Avec Python, écrire un programme qui prenne en argument un entier n et qui renvoie la matrice M^n