**Exercice 1**

Soit $X$ et $Y$ deux variables indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $q = 1-p$. Soit en outre $n$ un entier strictement positif.

**1.** Calculer $P(X \geqslant n)$

**2.** Calculer $P(Z \geqslant n)$ et en déduire $P(Z = n)$
Quelle est la loi de $Z$ ?

**3.** Les variables $X$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

**4.** Avec Python, écrire un programme qui simule la loi de $Z$

**Exercice 2**

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \dfrac{1}{4}(x+1)e^{-x}$

**1.** Justifier que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

**2.** Déterminer le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire les variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$

**3.** Montrer que $f'$ s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel $\alpha$ puis que $\alpha < -1$

**4.** Déterminer les variations de $f$ (faire un tableau complet faisant intervenir le réel $\alpha$).

**5.** Soit $u$ la suite définie par : $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

- **a.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant u_n < 0$
- **b.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
  En déduire que $u$ est convergente.
- **c.** Déterminer la limite du $u$